الدوال كثيرات الحدود

I. الدوال كثيرات الحدود:

1. الدالة كثير حدود:

نسمي دالة كثير حدود كل دالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.....+a_1x+a_0$

حيث: n عدد طبيعي و $a_n;a_{n-1};.....a_1;a_0$ أعداد حقيقية ثابتة.

مثال:

❖ الدوال $x\to x^5+2x^2+12$ ، $x\to 3x^2-5$ و $x\to \frac{1}{2}x-\sqrt{3}$ هي كثيرات حدود.

طريقة:

تكون الدالة f كثير حدود إذا توفر فيها الشرطان التاليان:

❖ أن تكون معرفة على $\mathbb{R}$.

❖ أن نتمكن من كتابتها على الشكل: $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.....+a_1x+a_0$.

أمثلة:

❖ الدالة f المعرفة من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=34x^2+3\sqrt{5}$ هي كثير حدود.

❖ الدالة g المعرفة من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(2x+1)^2-3x$ هي كثير حدود لأنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا: $g(x)=4x^2+x+1$.

❖ الدالة h المعرفة من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=\frac{3}{x^2+1}$ هي دالة ناطقة وليست كثير حدود لأنه لا يمكن كتابتها على الشكل: $h(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.....+a_1x+a_0$.

❖ الدالة T المعرفة بـ: $T(x)=x^3+x+\frac{1}{x}$ معرفة على $\mathbb{R}^*$ ومنه فهي ليست كثير حدود لأن كثير الحدود يجب أن يكون معرفا على $\mathbb{R}$.

2. درجة كثير حدود:

كل دالة كثير حدود غير معدومة f تكتب على الشكل: $f(x)=a_nx^n+...+a_1x+a_0$ مع $a_n\neq 0$.

يسمى العدد n درجة كثير الحدود f ، وتسمى الأعداد $a_n;...a_1;a_0$ معاملاته، ويسمى a_px^p الحد الذي درجته p .

ملاحظة:

يكون كثير حدود معدوما إذا وفقط إذا كانت كل معاملاته معدومة.

مثال:

❖ الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x+\sqrt{2}$ هي كثير حدود من الدرجة الثانية حيث: $a=-\frac{1}{2}$، $b=3$ و $c=\sqrt{2}$.

❖ الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2x^2-3x+1$ هي كثير حدود من الدرجة الثانية حيث: $a=2$، $b=-3$ و $c=1$.

ملاحظة:

❖ الدالة المعدومة هي كثير حدود درجته غير معينة.

❖ كل دالة ثابتة $x \to a_0$ $(a_0 \neq 0)$ هي كثير حدود درجته 0.

❖ كل دالة تآلفية $x \to ax+b$ $(a \neq 0)$ هي كثير حدود درجته 1.

❖ كل دالة $x \to ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$ هي كثير حدود درجته 2 (تسمى أيضا ثلاثي حدود من الدرجة الثانية).

أمثلة:

❖ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^5+x^3+x^2+1$ هي كثير حدود درجته 5.

❖ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2+5x-\sqrt{3}$ هي كثير حدود درجته 2.

❖ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=3x+5$ هي كثير حدود درجته 1.

❖ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-2$ هي كثير حدود درجته 0.

3. تساوي كثيري حدود:

يكون كثيرا الحدود الغير معدومين P و Q متساويان إذا وفقط إذا كانا من نفس الدرجة، وكانت معاملات حدودهما من نفس الدرجة متساوية.

طريقة:

الدالة P كثير حدود معرف على $\mathbb{R}$ بـ: $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$، والدالة Q كثير حدود معرف على $\mathbb{R}$ بـ: $Q(x)=5x^3-2x^2+\sqrt{5}$.

$P=Q$ معناه أن: $a=5$، $b=-2$، $c=0$ و $d=\sqrt{5}$.

أمثلة:

المثال 1: ليكن كثيرا الحدود P و Q المعرفان على $\mathbb{R}$ بـ:

$$P(x)=2x^3+3x^2-30x+25 \text{ و } Q(x)=(x+5)(2x^2-7x+5)$$

❖ باستعمال حاسبة يمكننا حساب $P(x)$ و $Q(x)$ لبعض القيم من x:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$P(x)$	88	81	56	25	0	-7	16
$Q(x)$	88	81	56	25	0	-7	16

يظهر لنا من خلال جدول القيم أن $P(x)$ و $Q(x)$ متساويان.

❖ من جهة أخرى، إذا قمنا بنشر $Q(x)$ نتحصل على:

$$Q(x)=(x+5)(2x^2-7x+5)=2x^3-7x^2+5x+10x^2-35x+25$$

$$=2x^3+3x^2-30x+25=P(x)$$

❖ ومنه فإنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا: $\boxed{P=Q}$.

المثال 2: نريد أن نبرهن أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا: $2x^3-11x^2+18x-9=(x-3)(ax^2+bx+c)$

حيث: c, b, a هي أعداد يجب إيجادها.

❖ ننشر $(x-3)(ax^2+bx+c)$ فنتحصل على: $ax^3+bx^2+cx-3ax^2-3bx-3c$.

❖ بالاختزال نتحصل على: $ax^3+(b-3a)x^2+(c-3b)x-3c$.

❖ نقارن ما تحصلنا عليه بـ: $2x^3-11x^2+18x-9$ فنتحصل على:

$$\begin{cases}a=2\\b-3a=-11\\c-3b=18\\-3c=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-11+3\times2\\c-18=3b\\c=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-5\\c=3\end{cases}$$

❖ ومنه فإنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا: $\boxed{2x^3-11x^2+18x-9=(x-3)(2x^2-5x+3)}$.

II. عمليات على كثيرات الحدود:

1. عمليات على كثيرات الحدود:

❖ مجموع، فرق وجداء كثيرات حدود هي كثيرات حدود.

❖ جداء كثيري حدود غير معدومين درجتاهما n و p على الترتيب هو كثير حدود درجته $(n+p)$.

❖ جداء كثير حدود P وعدد حقيقي k هو كثير الحدود kP المعرف بـ: $(kP)(x)=k\times P(x)$.

❖ مركب كثيري حدود هو كثير حدود.

ملاحظة:

بصفة عامة حاصل قسمة كثير حدود f على كثير حدود g ليس كثير حدود.

مثال:

ليكن كثيرا الحدود f و g المعرفان على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x)=x^2+3x-2 \qquad f(x)=4x^3-x^2+7x+1$$

1) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

$$= \left(4x^3 - x^2 + 7x + 1\right) + \left(x^2 + 3x - 2\right)$$
$$= 4x^3 \cancel{-x^2} + 7x + 1 \cancel{+x^2} + 3x - 2$$
$$= 4x^3 + 10x - 1$$

المجموع $f+g$ هو كثير حدود من الدرجة 3.

2) $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
$$= \left(4x^3 - x^2 + 7x + 1\right) - \left(x^2 + 3x - 2\right)$$
$$= 4x^3 - x^2 + 7x + 1 - x^2 - 3x + 2$$
$$= 4x^3 - 2x^2 + 4x + 3$$

الفرق $f-g$ هو كثير حدود من الدرجة 3.

3) $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$
$$= \left(4x^3 - x^2 + 7x + 1\right) \times \left(x^2 + 3x - 2\right)$$
$$= 4x^5 + 12x^4 - 8x^3 - x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 7x^3 + 21x^2 - 14x + x^2 + 3x - 2$$
$$= 4x^5 + 11x^4 - 4x^3 + 24x^2 - 11x - 2$$

الجداء $f \times g$ هو كثير حدود من الدرجة 5.

4) $(3f)(x) = 3 \times f(x) = 3\left(4x^3 - x^2 + 7x + 1\right) = 12x^3 - 3x^2 + 21x + 3$

الجداء $3f$ هو كثير حدود من الدرجة 3.

2. جذر كثير حدود:

ليكن f كثير حدود درجته أكبر أو يساوي 1، و α عدد حقيقي. العدد α جذر لكثير الحدود f يعني $f(\alpha) = 0$.

أمثلة:

المثال 1: $P(x) = 2x - 4$. 2 هو جذر لكثير الحدود P لأن $P(2) = 0$.

المثال 2: $Q(x) = 2x^3 - 11x^2 + 18x - 9$. لنبرهن أن 3 هو جذر لـ Q.
$$Q(3) = 2 \times 3^3 - 11 \times 3^2 + 18 \times 3 - 9$$
$$= 54 - 99 + 54 - 9 = 108 - 108 = 0$$

ومنه فإن: 3 هو جذر لـ Q.

3. تحليل كثير حدود باستعمال العامل $(x-\alpha)$:

إذا كان f كثير حدود معرف على $\mathbb{R}$ ودرجته n $(n \geq 1)$، و $f(\alpha) = 0$ (α جذر لكثير الحدود f).
فإنه يمكن تحليل $f(x)$ باستعمال العامل $(x-\alpha)$، ونتحصل على: $f(x) = (x-\alpha)g(x)$ حيث:
$g(x)$ كثير حدود درجته $(n-1)$.

طرق تحليل كثير حدود:

لتحليل كثير الحدود f إلى $f(x)=(x-\alpha)g(x)$ نتبع إحدى الطرق التالية:

الطريقة الأولى:

- ❖ نختزل $f(x)$ لأقصى حد ممكن، ثم نرتبه ترتيبا تنازليا من الحد الأكبر درجة إلى الحد الأصغر درجة.
- ❖ نقوم بنشر $(x-\alpha)g(x)$، ثم نختزل ما تحصلنا عليه لأقصى حد ممكن ونرتبه ترتيبا تنازليا من الحد الأكبر درجة إلى الحد الأصغر درجة.
- ❖ نقارن معاملات $f(x)$ بالمعاملات المتحصل عليها، ونستنتج معاملات $g(x)$.

الطريقة الثانية: القسمة الإقليدية: الطريقة تشبه قسمة عدد طبيعي على عدد طبيعي آخر.

قبل البدء في قسمة كثير الحدود $f(x)$ على $(x-\alpha)$، يجب إتباع الخطوات التالية:

- ❖ نختزل $f(x)$ لأقصى حد ممكن، ثم نرتبه ترتيبا تنازليا من الحد الأكبر درجة إلى الحد الأصغر درجة.
- ❖ نكمل كتابة $f(x)$ بكل حدوده (نكتب حتى المعاملات المعدومة).
- ❖ نقوم بالقسمة ونتوقف عند الحصول على باق معدوم.
- ❖ حاصل القسمة هو $g(x)$.

الطريقة الثالثة: خوارزمية هورنر (Horner)

- ❖ نعتبر f كثير حدود من الدرجة 3 حيث: $f(x)=\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0$ و a جذر لـ f.
- ❖ نضع: $h_3=\alpha_3$، $h_2=\alpha_2+ah_3$، $h_1=\alpha_1+ah_2$ و $h_0=\alpha_0+ah_1$. تسمى الأعداد $h_3;h_2;h_1;h_0$ معاملات هورنر المرفقة بالعدد a.
- ❖ باستعمال العامل $(x-a)$ نلاحظ أن: $f(x)=(x-a)(h_3x^2+h_2x+h_1)$.

α_3	α_2+ah_3	α_1+ah_2	α_0+ah_1
h_3	h_2	h_1	h_0

أمثلة:

المثال 1: ليكن كثير الحدود P المعرف على $\mathbb{R}$ بـ: $P(x)=3x^4-x^3+x^2+11x+6$.

نلاحظ أن $P(x)$ من الدرجة 4 وأن (-1) هو جذر لـ $P(x)$. ومنه فإنه يوجد كثير حدود Q من الدرجة 3 حيث من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، لدينا: $P(x)=(x+1)Q(x)$.

$$\begin{aligned}P(x)&=(x+1)Q(x)\\&=(x+1)(ax^3+bx^2+cx+d)\\&=ax^4+bx^3+cx^2+dx+ax^3+bx^2+cx+d\\&=ax^4+(b+a)x^3+(c+b)x^2+(d+c)x+d\end{aligned}$$

كثيرا الحدود $3x^4-x^3+x^2+11x+6$ و $ax^4+(b+a)x^3+(c+b)x^2+(d+c)x+d$ متساويان معناه أن معاملاهما متساويان أيضا. ومنه فإن:

$$\begin{cases} a=3 \\ b+a=-1 \\ c+b=1 \\ d+c=11 \\ d=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-4 \\ c=5 \\ d=6 \end{cases}$$

نستنتج أن $\boxed{P(x)=(x+1)(3x^3-4x^2+5x+6)}$.

المثال 2: ليكن كثير الحدود f المعرف على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3+6x^2-x-30$.

نلاحظ أن $f(x)$ من الدرجة 3 وأن (-5) هو جذر لـ $f(x)$. ومنه فإنه يوجد كثير حدود g من الدرجة 2 حيث من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، لدينا: $f(x)=(x+5)g(x)$.

نستعمل القسمة الإقليدية لحساب $g(x)$.

$$\begin{array}{r|l} x^3+6x^2-x-30 & x+5 \\ \hline -x^3-5x & x^2+x-6 \\ x^2-x & \\ -x^2-5x & \\ -6x-30 & \\ 6x+30 & \\ 0 & \end{array}$$

نتحصل على: $g(x)=x^2+x-6$ ومنه فإن:

$\boxed{f(x)=(x+5)(x^2+x-6)}$.

المثال 3: ليكن كثير الحدود f المعرف على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3-7x^2+16x-12$.

أحسب $f(2)$ ، ثم استنتج أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا: $f(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$ ، حيث: c, b, a هي أعداد حقيقية يجب إيجادها.

❖ $f(2)=2^3-7\times 2^2+16\times 2-12=8-28+32-12=0$.

	1	−7	16	−12
2		2	−10	+ 12
	1	− 5	6	0

❖ من خلال خوارزمية هورنر نلاحظ أن: $a=1$ ، $b=-5$ و $c=6$.

❖ ومنه فإن: $\boxed{f(x)=(x-2)(x^2-5x+6)}$.

III. كثير الحدود من الدرجة الثانية:

1. كثير الحدود من الدرجة الثانية:

كثير الحدود من الدرجة الثانية (أو ثلاثي الحدود) هو الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$f(x)=ax^2+bx+c$. حيث: a، b و c أعداد حقيقية ثابتة مع $a\neq 0$.

أمثلة:

❖ الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x^2-2x+1$ هي كثير حدود من الدرجة الثانية.

❖ الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^2-\frac{x}{2}-3$ هي كثير حدود من الدرجة الثانية.

2. الشكل النموذجي لثلاثي الحدود ax^2+bx+c مع $a\neq 0$:

ليكن ax^2+bx+c ثلاثي حدود $(a\neq 0)$.

❖ يسمى العدد b^2-4ac مميز ثلاثي الحدود ax^2+bx+c، ونرمز له بالرمز Δ.

❖ يسمى $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ الشكل النموذجي لثلاثي الحدود ax^2+bx+c.

مثال:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-2x^2-3x+2$.

❖ $\Delta=(-3)^2-4(-2)\times 2=9+16=25.$

❖ $f(x)=-2\left[\left(x+\frac{(-3)}{2\times(-2)}\right)^2-\frac{25}{4(-2)^2}\right]=-2\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right]$

ومنه فإنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا: $\boxed{f(x)=-2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{25}{8}}$.

3. تغيرات ثلاثي الحدود:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$.

بمعرفة الشكل النموذجي للدالة f، نستطيع معرفة تغيراتها، وتحديد قيمها الحدية العظمى والصغرى.

❖ عندما يكون $a<0$، فإن: الدالة f متزايدة تماما على $\left]-\infty;-\frac{b}{2a}\right]$، ومتناقصة تماما على $\left[-\frac{b}{2a};+\infty\right[$.

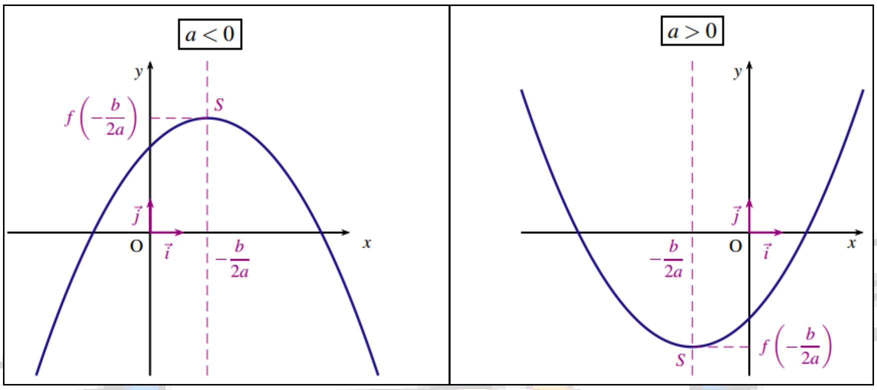
❖ عندما يكون $a>0$، فإن: الدالة f متناقصة تماما على $\left]-\infty;-\frac{b}{2a}\right]$، ومتزايدة تماما على $\left[-\frac{b}{2a};+\infty\right[$.

4. التمثيل البياني لثلاثي الحدود:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$. و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

❖ (C_f) هو قطع مكافئ معادلته: $y=ax^2+bx+c$. قمته هي النقطة $S\left(-\frac{b}{2a};f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ ، والتي تمثل القيمة العظمى أو الصغرى للدالة f على $\mathbb{R}$.

❖ (C_f) له محور تناظر هو المستقيم الذي معادلته: $x=-\frac{b}{2a}$.



مثال:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-3x^2-2x+1$. لدينا: $a=-3$ ، $b=-2$ و $c=1$ ومنه فإن: $-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\times(-3)}=-\frac{1}{3}$. ولدينا: $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}$. وبما أن $a<0$

فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	$\frac{4}{3}$	↘

والشكل المقابل يمثل (C_f) التمثيل البياني للدالة f.