طرق عملية لحل تمارين النهايات

1. حساب نهاية دالة مركبة:

لحساب نهاية الدالة h المعرفة بـ: $h = f \circ g$ عند a (حيث a يمثل عدد حقيقي، $+\infty$ أو $-\infty$) يجب:

❖ نحسب نهاية الدالة g عند a، ولتكن $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$.

❖ نضع $X = g(x)$، ونعوض $g(x)$ بـ X في عبارة $h(x)$، فيصبح لدينا: $h(x) = f(X)$.

❖ نحسب نهاية الدالة f عندما X يؤول إلى b، أي نحسب $\lim\limits_{X \to b} f(X)$ ولتكن $\lim\limits_{X \to b} f(X) = c$.

❖ ومنه نستنتج أن: $\lim\limits_{x \to a} h(x) = c$.

مثال: لتكن f و g دالتين معرفتين على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^2$ و $g(x) = 2 - 3x$. احسب نهاية الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h = f \circ g$ عند $+\infty$.

الحل:

❖ $h(x) = f(g(x)) = (2-3x)^2$.

❖ $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (2-3x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-3x) = -\infty \quad (1)$

❖ $\lim\limits_{X \to -\infty} f(X) = \lim\limits_{X \to -\infty} X^2 = +\infty \quad (2)$.

من (1) و(2) نستنتج أن $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

2. حساب نهاية دالة عندما x يؤول إلى قيمة ممنوعة:

لتكن f دالة ناطقة مقامها ينعدم من أجل $x = a$. لحساب $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ يجب أن:

❖ نحدد نهاية البسط.

❖ نحدد إشارة المقام.

❖ إذا كان المقام يؤول إلى 0 بقيم موجبة:

- وكان البسط يؤول إلى $+\infty$ أو إلى عدد موجب تماما فإن $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.
- وكان البسط يؤول إلى $-\infty$ أو إلى عدد سالب تماما فإن $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.
- إذا كان البسط يؤول إلى 0، فإننا نكون أمام حالة عدم تعيين، ويجب استعمال طريقة لنزع ح ع ت.

❖ إذا كان المقام يؤول إلى 0 بقيم سالبة:

- وكان البسط يؤول إلى $+\infty$ أو إلى عدد موجب تماما فإن $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.
- وكان البسط يؤول إلى $-\infty$ أو إلى عدد سالب تماما فإن $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.
- إذا كان البسط يؤول إلى 0، فإننا نكون أمام حالة عدم تعيين، ويجب استعمال طريقة لنزع ح ع ت.

مثال:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x-1}$. أحسب $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$.

الحل:

❖ $\lim\limits_{x\to1} x^2+2=3$.

❖ $x<1 \Leftrightarrow x-1<0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1^-}(x-1)=0^-$.

ومنه فإن $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$.

3. إثبات أن منحنى دالة يقبل مستقيما مقاربا أفقيا:

لإثبات أن (C_f) منحنى الدالة f يقبل مستقيما مقاربا أفقيا عند ∞ يجب أن:

❖ نحسب $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

❖ إذا كانت $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$، فإن المستقيم الذي معادلته $y=a$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) عند ∞.

❖ إذا كانت $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$، فإن (C_f) لا يقبل مستقيما مقاربا أفقيا عند ∞.

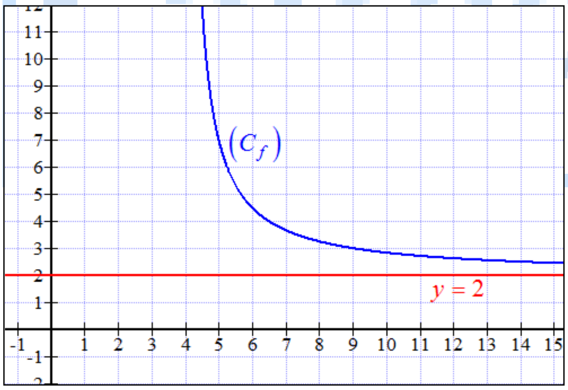
مثال:

لتكن الدالة f المعرفة على $]4;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{2x-3}{x-4}$. هل يقبل (C_f) منحنى الدالة f مستقيما مقاربا أفقيا عند $+\infty$.

الحل:

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-3=+\infty$، و $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-4)=+\infty$. إذن لدينا ح ع ت $\dfrac{\infty}{\infty}$ ولإزالتها نحلل البسط والمقام، فنتحصل على:

$$f(x)=\frac{2x-3}{x-4}=\frac{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}{x\left(1-\frac{4}{x}\right)}=\frac{2-\frac{3}{x}}{1-\frac{4}{x}}$$



ونعلم أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\dfrac{3}{x}\right)=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}\right)=1$، ومنه فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $y=2$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) عند $+\infty$. والشكل المقابل يؤكد صحة النتائج المتحصل عليها.

4. إثبات أن منحنى دالة يقبل مستقيما مقاربا عموديا:

إذا كان (C_f) منحنى الدالة f يقبل مستقيما مقاربا عموديا فسيكون حتما عند العدد الحقيقي a الذي يمثل حدا حقيقيا مفتوحا من حدود مجموعة تعريف الدالة f ، أي أنه يمثل قيمة ممنوعة للدالة f .

ولإثبات ذلك يجب أن نحسب نهاية الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

- ❖ إذا كانت الدالة f غير معرفة على يسار a، نحسب $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ ،
- ❖ إذا كانت الدالة f غير معرفة على يمين a، نحسب $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ ،
- ❖ إذا كانت الدالة f معرفة على يسار وعلى يمين a، نحسب $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

يمكن استنتاج أن المستقيم الذي معادلته $x=a$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) في 3 حالات التالية:

- ❖ إذا كانت الدالة f غير معرفة على يسار a، و $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$ ،
- ❖ إذا كانت الدالة f غير معرفة على يمين a، و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\infty$ ،
- ❖ إذا كانت الدالة f معرفة على يسار وعلى يمين a، و $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\infty$ (دون أن يكونا متساويتين).

مثال:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}\setminus\{-2;3\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2+3x+4}{(x+2)(x-3)}$. أوجد المستقيمات المقاربة الممكنة لـ (C_f) منحنى الدالة f .

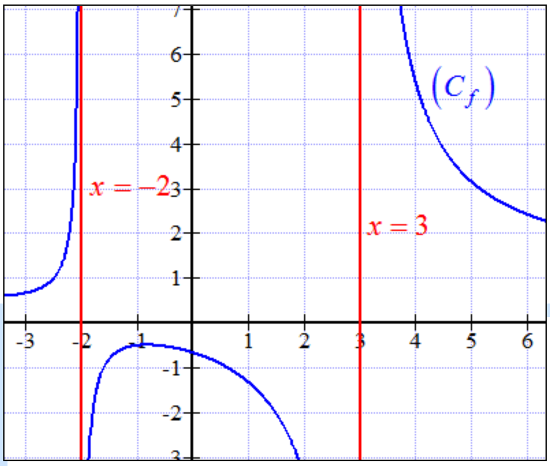
الحل:

❖ نكتب مجموعة تعريف الدالة f على شكل اتحاد مجموعات:

$$D_f=]-\infty;-2[\cup]-2;3[\cup]3;+\infty[$$

الحدود الحقيقية المفتوحة هي: -2 ; 3 . ومنه لدينا:

- ❖ $\lim\limits_{x\to -2^-} x+2=0^-$ ، و $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x^2+3x+4}{x-3}\right)=-\dfrac{2}{5}$. إذن: $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=+\infty$.
- ❖ $\lim\limits_{x\to -2^+} x+2=0^+$ ، و $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x^2+3x+4}{x-3}\right)=-\dfrac{2}{5}$. إذن: $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-\infty$.
- ❖ $\lim\limits_{x\to 3^-} x-3=0^-$ ، و $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2+3x+4}{x+2}\right)=\dfrac{22}{5}$. إذن: $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$.
- ❖ $\lim\limits_{x\to 3^+} x-3=0^+$ ، و $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2+3x+4}{x+2}\right)=\dfrac{22}{5}$. إذن: $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$.



الدالة f معرفة على يسار وعلى يمين -2 ولدينا $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-\infty$ ، كما أنها معرفة على يسار وعلى يمين 3 ولدينا $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$ ، ومنه يمكننا أن نستنتج أن المستقيمين اللذين معادلتهما على التوالي $x=-2$ و $x=3$ هما مستقيمان مقاربان عموديان لـ (C_f) عند -2 و 3.

والشكل المقابل يؤكد صحة النتائج المتحصل عليها.

5. إثبات أن منحنى دالة يقبل مستقيما مقاربا مائلا:

لإثبات أن المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) منحنى الدالة f عند ∞، يجب إثبات أن: $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$.

مثال:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2-x-3}{x+1}$. برهن أن (C_f) منحنى الدالة f يقبل المستقيم d الذي معادلته $y=x-2$ مستقيما مقاربا مائلا.

الحل:

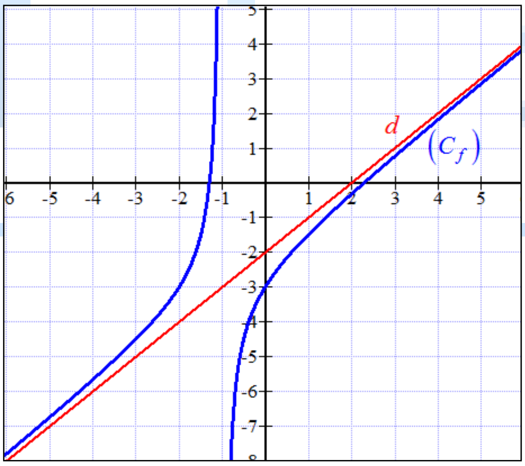
❖ $$f(x)-(x-2)=\frac{x^2-x-3}{x+1}-(x-2)=\frac{x^2-x-3-(x-2)(x+1)}{x+1}$$
$$=\frac{x^2-x-3-\left(x^2+x-2x-2\right)}{x+1}=\frac{-1}{x+1}.$$

❖ لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$ ومنه فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-1}{x+1}\right)=0^+$. أي: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]=0$ (1).

❖ ولدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ ومنه فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-1}{x+1}\right)=0^-$. أي: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]=0$ (2).

❖ من (1) و(2) نستنتج أن (C_f) يقبل المستقيم d الذي معادلته $y=x-2$ مستقيما مقاربا مائلا عند ∞.

والشكل المقابل يؤكد صحة النتائج المتحصل عليها.



6. دراسة وضعية منحنى دالة بالنسبة لمستقيم:

لدراسة وضعية المنحنى $\left(C_f\right)$ للدالة f بالنسبة للمستقيم d الذي معادلته $y=ax+b$ ، يجب دراسة إشارة $f(x)-(ax+b)$. ولأجل ذلك يجب:

- ❖ حساب واختزال (إلى أبعد حد ممكن) عبارة $f(x)-(ax+b)$.
- ❖ دراسة إشارة $f(x)-(ax+b)$ بتعيين كل القيم اللازمة لـ x ، وتشكيل جدول إشارة إن لزم الأمر.

في الأخير، يمكن أن نستنتج أنه:

- ❖ في المجالات التي تكون فيها $f(x)-(ax+b)>0$ ، فإن: $\left(C_f\right)$ يقع فوق d.
- ❖ في المجالات التي تكون فيها $f(x)-(ax+b)<0$ ، فإن: $\left(C_f\right)$ يقع تحت d.
- ❖ عندما تكون $f(x)-(ax+b)=0$ ، فإن: $\left(C_f\right)$ و d يتقاطعان.

مثال:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$. أدرس وضعية $\left(C_f\right)$ منحنى الدالة f بالنسبة للمستقيم d الذي معادلته $y=x-1$.

الحل:

❖ $f(x)-(x-1)=\dfrac{x^2+1}{x+1}-(x-1)=\dfrac{x^2+1-(x-1)(x+1)}{x+1}=\dfrac{x^2+1-\left(x^2-1\right)}{x+1}=\dfrac{2}{x+1}$.

❖ $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$.

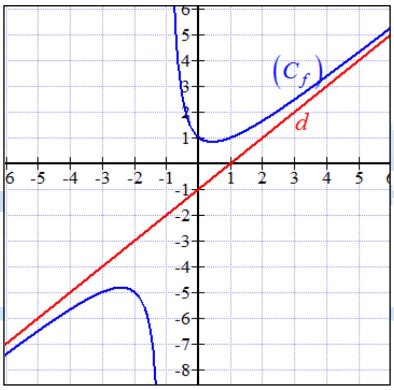
ومنه فإن جدول إشارة $f(x)-(x-1)$ يكون كالتالي:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
2	$+$		$+$
$x+1$	$-$	0	$+$
$f(x)-(x-1)$	$-$	‖	$+$

ومنه نستنتج أن:

- ❖ (C_f) يقع تحت المستقيم d على المجال $]-\infty;-1[$ ،
- ❖ و (C_f) يقع فوق المستقيم d على المجال $]-1;+\infty[$.

والشكل المقابل يؤكد صحة النتائج المتحصل عليها.



تمّ بحمد الله وتوفيقه