ملخص درس النهايات

I. نهاية دالة عند ∞:

1. نهاية منتهية لدالة:

أ. نهاية منتهية لدالة عند $+\infty$:

❖ القول أن الدالة f تؤول إلى ℓ عندما x يؤول إلى $+\infty$، تعني أنه من أجل كل مجال مفتوح مركزه ℓ، يوجد عدد حقيقي x_0 بحيث من أجل كل الأعداد الحقيقية x الأكبر من x_0، $f(x)$ تنتمي لهذا المجال.
ونكتب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$.

ب. نهاية منتهية لدالة عند $-\infty$:

❖ القول أن الدالة f تؤول إلى ℓ عندما x يؤول إلى $-\infty$، تعني أنه من أجل كل مجال مفتوح مركزه ℓ، يوجد عدد حقيقي x_0 بحيث من أجل كل الأعداد الحقيقية x الأصغر من x_0، $f(x)$ تنتمي لهذا المجال.
ونكتب: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$.

2. نهاية غير منتهية لدالة:

أ. نهاية غير منتهية لدالة عند $+\infty$:

❖ القول أن نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي $+\infty$، يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي A، يوجد عدد حقيقي x_0 حيث: من أجل كل الأعداد الحقيقية الأكبر من x_0، يكون $f(x)>A$. ونكتب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

❖ القول أن نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي $-\infty$، يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي A، يوجد عدد حقيقي x_0 حيث: من أجل كل الأعداد الحقيقية الأكبر من x_0، يكون $f(x)<A$. ونكتب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

ب. نهاية غير منتهية لدالة عند $-\infty$:

❖ القول أن نهاية الدالة f عند $-\infty$ هي $+\infty$، يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي A، يوجد عدد حقيقي x_0 حيث: من أجل كل الأعداد الحقيقية الأصغر من x_0، يكون $f(x)>A$. ونكتب: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

❖ القول أن نهاية الدالة f عند $-\infty$ هي $-\infty$، يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي A، يوجد عدد حقيقي x_0 حيث: من أجل كل الأعداد الحقيقية الأصغر من x_0، يكون $f(x)<A$. ونكتب: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

II. نهاية دالة عند عدد حقيقي a:

1. نهاية منتهية لدالة عند عدد حقيقي a:

❖ القول أن الدالة f تقبل نهاية منتهية ℓ عند a، تعني أن كل مجال مفتوح يشمل ℓ، يشمل في نفس الوقت كل قيم $f(x)$ من أجل x قريب بقدر كاف من a. ونكتب: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$.

2. نهاية غير منتهية لدالة عند عدد حقيقي a:

❖ القول أن الدالة f تؤول إلى $+\infty$ عندما x يؤول إلى a، تعني أنه من أجل كل عدد حقيقي A، يوجد مجال I مركزه a، من أجل كل $x \in I$، يكون $f(x) > A$. ونكتب: $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.

❖ القول أن الدالة f تؤول إلى $-\infty$ عندما x يؤول إلى a، تعني أنه من أجل كل عدد حقيقي A، يوجد مجال I مركزه a، من أجل كل $x \in I$، يكون $f(x) < A$. ونكتب: $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

3. نهاية دالة عن يمين وعن يسار عدد حقيقي:

نستطيع دراسة نهاية الدالة f عند عدد حقيقي a:

❖ بقيم أصغر من a، فنتحدث عندها عن نهاية عن يسار a، ونكتب: $\lim_{x \to a^-} f(x)$.

❖ بقيم أكبر من a، فنتحدث عندها عن نهاية عن يمين a، ونكتب: $\lim_{x \to a^+} f(x)$.

خاصية: نقول أن الدالة f تقبل نهاية عند العدد الحقيقي a، إذا وفقط إذا، كانت تقبل نهاية عن يسار a، وعن يمين a، وكانت هاتين النهايتين متساويتين.

مثال: لدينا $\lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$ و $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$، وبما أن $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) \neq \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{x}\right)$ فإن الدالة "مقلوب" لا تقبل نهاية عند 0.

III. تتمات على النهايات:

1. نهايات الدوال المرجعية:

❖ الدوال كثيرات الحدود، الدوال الناطقة، الدالة "مربع"، الدالة "قيمة مطلقة"، الدالة "جيب" والدالة "تجب" تقبل نهايات منتهية عند كل عدد حقيقي a من مجموعة تعريفها، وهذه النهاية هي: قيمة a بهذه الدالة.

❖ ليكن $n \in \mathbb{N}^*$، لدينا:

$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ ، $\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ إذا كان n عددا زوجيا وإذا كان n عددا فرديا.

❖ $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ ، و $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$.

❖ $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ ، و $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

❖ $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

2. العمليات على النهايات:

أ. نهاية مجموع دالتين:

$\lim f$	a	a	a	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	a'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f+g$	$a+a'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ح ع ت

ب. نهاية جداء دالتين:

$\lim f$	a	$a \neq 0$	∞	0
$\lim g$	a'	∞	∞	∞
$\lim f \times g$	$a \times a'$	∞	∞	ح ع ت

ملاحظة: عندما تكون نهاية الجداء ∞، نطبق قواعد إشارة جداء لتعيين إذا كانت $+\infty$ أو $-\infty$.

ج. نهاية حاصل قسمة دالتين:

$\lim f$	a	$a \neq 0$	a	∞	0	∞
$\lim g$	$a' \neq 0$	$a' = 0^+$ $a' = 0^-$	∞	$a' \neq 0$	0	∞
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{a}{a'}$	∞	0	∞	ح ع ت	ح ع ت

ملاحظة: عندما تكون نهاية حاصل القسمة ∞، نطبق قواعد إشارة حاصل القسمة لتعيين إذا كانت $+\infty$ أو $-\infty$.

د. حالات عدم التعيين وطرق إزالتها:

مما سبق يمكننا أن نلخص حالات عدم التعيين فيما يلي:

$+\infty - \infty$	$0 \times \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$

لإزالة حالة عدم التعيين، نتبع إحدى الطرق التالية:

- ❖ الاختزال.
- ❖ التحليل.
- ❖ المرافق.
- ❖ تعريف العدد المشتق.

3. نهاية دالة كثيرة حدود أو دالة ناطقة عند ∞:

- ❖ النهاية عند ∞ لدالة كثيرة حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة عند ∞.
- ❖ النهاية عند ∞ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند ∞.

4. نهاية دالة مركبة:

- ❖ إذا كانت $\lim_{x \to \alpha} g(x) = \beta$ و $\lim_{x \to \beta} f(x) = \gamma$ فإن: $\lim_{x \to \alpha} f \circ g(x) = \gamma$.

IV. النهايات والحصر:

1. الحصر عند نهاية منتهية:

f ، g و h دوال عددية معرفة على المجال I ، و ℓ و ℓ' عددان حقيقيان.

- ❖ إذا كانت: $g(x) \le f(x) \le h(x)$ من أجل كل $x \in I$ ، وكانت $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \ell$ و $\lim\limits_{x \to \infty} h(x) = \ell$ ، فإن: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \ell$.
- ❖ إذا كانت $f(x) \le g(x)$ ، و $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \ell$ و $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = \ell'$ فإن: $\ell \le \ell'$.

2. الحصر عند نهاية غير منتهية:

f و g دالتان عدديتان معرفتان على المجال I ، و ℓ عدد حقيقي.

- ❖ إذا كانت: $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = +\infty$ ومهما يكن $x \in I$ ، $f(x) \ge g(x)$ ، فإن: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$.
- ❖ إذا كانت: $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = -\infty$ ومهما يكن $x \in I$ ، $f(x) \le g(x)$ ، فإن: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.

V. المستقيمات المقاربة والفروع اللانهائية:

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f :

- ❖ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \ell$ تعني أن (C) يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته: $y = \ell$ عند ∞ .
- ❖ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ تعني أن (C) يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته: $x = x_0$.
- ❖ $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ تعني (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته: $y = ax + b$.
- ❖ إذا كانت الدالة f معرفة كما يلي: $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ مع $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x) = 0$ ، فإن المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C) .

تمّ بحمد الله وتوفيقه