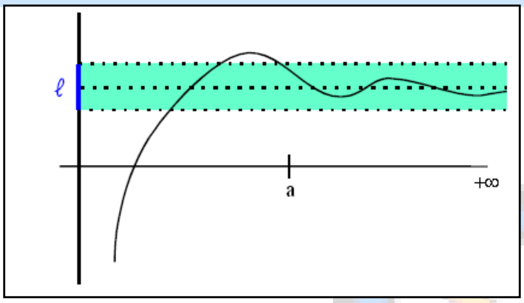
النـهايات

I. نـهاية منتهية لدالة عند ∞ :

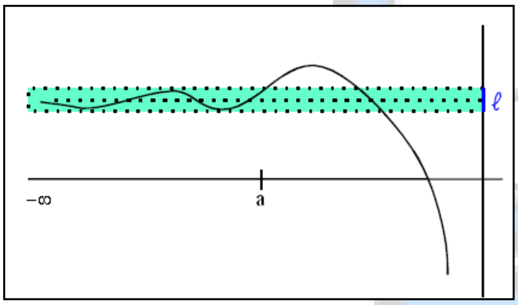
1. نـهاية منتهية لدالة عند $+\infty$:

لتكن f دالة معرفة على مجال يشمل المجال المفتوح $]a;+\infty[$ و ℓ عدد حقيقي.
إذا كان كل مجال مفتوح يشمل ℓ يشمل في نفس الوقت $f(x)$ من أجل x كبير بقدر كاف، نقول عن الدالة f أنها تؤول إلى العدد الحقيقي ℓ عندما يؤول x إلى $+\infty$، ونكتب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$.



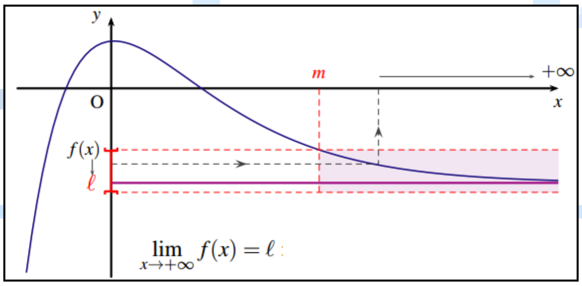
2. نـهاية منتهية لدالة عند $-\infty$:

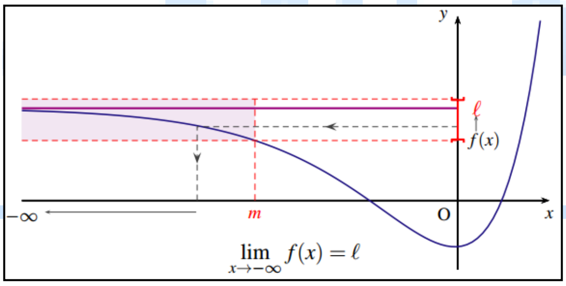
لتكن f دالة معرفة على مجال يشمل المجال المفتوح $]-\infty;a[$ و ℓ عدد حقيقي.
إذا كان كل مجال مفتوح يشمل ℓ يشمل في نفس الوقت $f(x)$ من أجل x صغير بقدر كاف، نقول عن الدالة f أنها تؤول إلى العدد الحقيقي ℓ عندما يؤول x إلى $-\infty$، ونكتب: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$.



3. المستقيم المقارب:

ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في معلم، وليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y=\ell$.
إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ (على الترتيب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$) نقول عندئذ أن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$، (على الترتيب عند $-\infty$).





نتيجة:

❖ لدراسة وضعية (C) المنحنى الممثل للدالة f بالنسبة للمستقيم (d) الذي معادلته: $y=\ell$، ندرس إشارة الفرق: $[f(x)-\ell]$:

- $[f(x)-\ell]<0$ معناه أن (C) يقع تحت (d).
- $[f(x)-\ell]>0$ معناه أن (C) يقع فوق (d).

أمثلة:

❖ لتكن $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+4}{-x^2-5x+1}$، بيّن أن المستقيم الذي معادلته $y=-2$ مستقيم مقارب أفقي لـ $f(x)$ عند $+\infty$.

❖ لتكن $g(x)=\dfrac{-3x+5}{x+1}$، بيّن أن المستقيم الذي معادلته $y=-3$ مستقيم مقارب أفقي لـ $g(x)$ عند $-\infty$.

الحل:

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-3x+4}{-x^2-5x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{-x^2}=-2$

ومنه فإن المستقيم الذي معادلته $y=-2$ مستقيم مقارب أفقي لـ $f(x)$ عند $+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x+5}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x}{x}=-3$

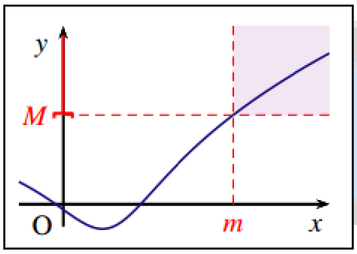
ومنه فإن المستقيم الذي معادلته $y=-3$ مستقيم مقارب أفقي لـ $g(x)$ عند $-\infty$.

II. نهاية غير منتهية لدالة عند ∞:

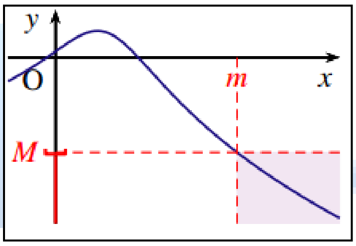
1. تعريف 1:

لتكن f دالة معرفة على مجال من الشكل $]A;+\infty[$، حيث A عدد حقيقي.

القول أن نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي $+\infty$، يعني أن كل مجال من الشكل $]M;+\infty[$ (مع M عدد حقيقي) يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي، ونكتب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.



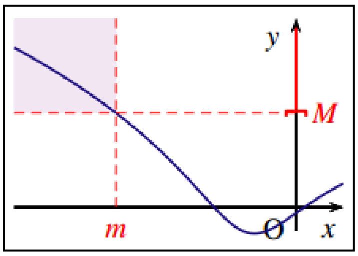
القول أن نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي $-\infty$، يعني أن كل مجال من الشكل $]-\infty.M[$ (مع M عدد حقيقي) يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي، ونكتب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

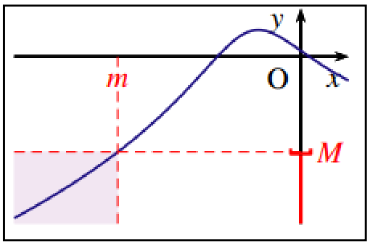


2. تعريف 2:

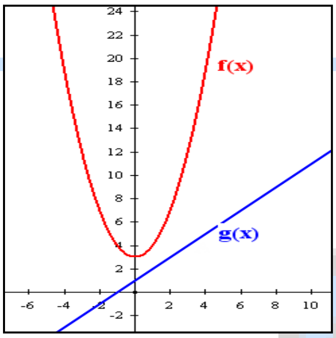
لتكن f دالة معرفة على مجال من الشكل $]-\infty.A[$، حيث A عدد حقيقي.

القول أن نهاية الدالة f عند $-\infty$ هي $+\infty$، يعني أن كل مجال من الشكل $]M;+\infty[$ (مع M عدد حقيقي) يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل $x<0$ وبعيد عن 0 بالقدر الكافي، ونكتب: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.





القول أن نهاية الدالة f عند $-\infty$ هي $-\infty$، يعني أن كل مجال من الشكل $]-\infty.M[$ (مع M عدد حقيقي) يشمل كل قيم f(x) من أجل $x<0$ وبعيد عن 0 بالقدر الكافي، ونكتب: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.



أمثلة:

لتكن $f(x)=x^2+3$ و $g(x)=x+1$، أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

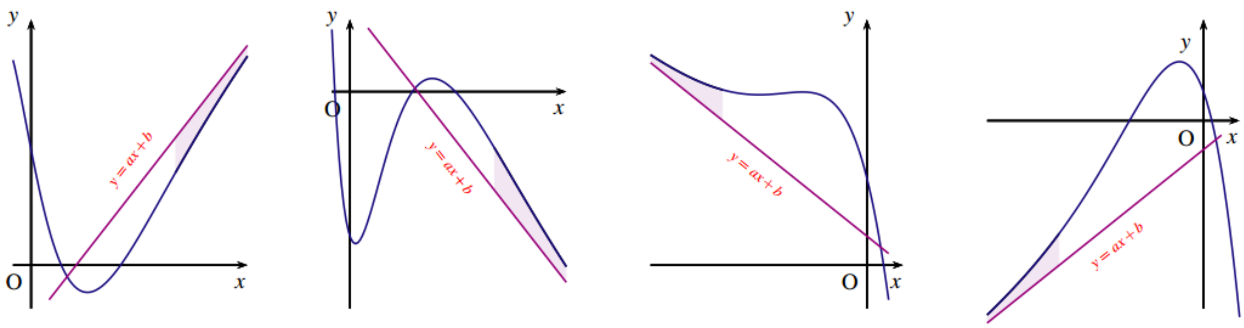
الحل:

- ❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+3=+\infty$.
- ❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x+1=-\infty$.

3. المستقيم المقارب:

ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في معلم، وليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y=ax+b$.

إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ (على الترتيب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$) نقول عندئذ أن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$، (على الترتيب عند $-\infty$).



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

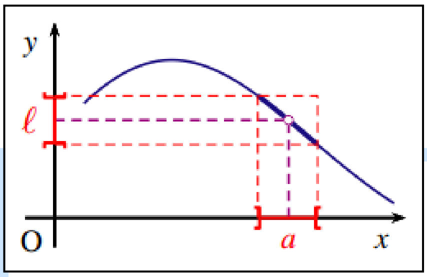
نتيجة:

لدراسة وضعية (C) المنحنى الممثل للدالة f بالنسبة للمستقيم (d) الذي معادلته: $y=ax+b$، ندرس إشارة الفرق: $[f(x)-(ax+b)]$:

- $[f(x)-(ax+b)]<0$ معناه أن (C) يقع تحت (d).
- $[f(x)-(ax+b)]>0$ معناه أن (C) يقع فوق (d).

III. نهاية منتهية لدالة عند عدد حقيقي:

1. تعريف:



لتكن f دالة معرفة بجوار العدد الحقيقي a، وليكن ℓ عددا حقيقيا.

القول أن الدالة f تقبل نهاية منتهية ℓ عند a،تعني أن كل مجال مفتوح يشمل ℓ، يشمل في نفس الوقت كل قيم f(x) من أجل x قريب بقدر كاف من a. ونكتب: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

2. مثال:

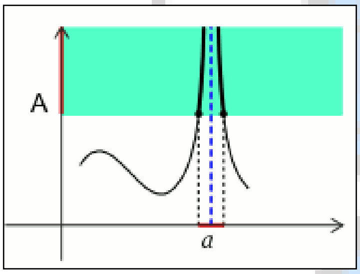
لتكن $f(x) = x^2 + 3$، أحسب $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

الحل: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 + 3 = 3$، نقول أن f تقبل نهاية منتهية هي 3 عند 0.

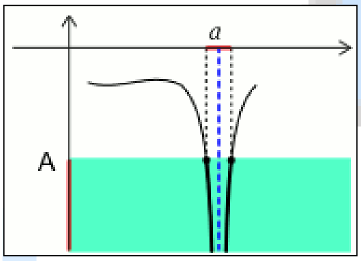
IV. نهاية غير منتهية لدالة عند عدد حقيقي:

1. تعريف:

لتكن f دالة معرفة على المجال المفتوح $]a;a+r[$ (أو $]a-r;a[$)، حيث r عدد حقيقي موجب.



❖ إذا كان كل مجال مفتوح $]A;+\infty[$ يشمل كل قيم f(x) من أجل x قريب بقدر كاف من a، نقول أن الدالة f تؤول إلى $+\infty$ عندما x تؤول إلى a. ونكتب: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.



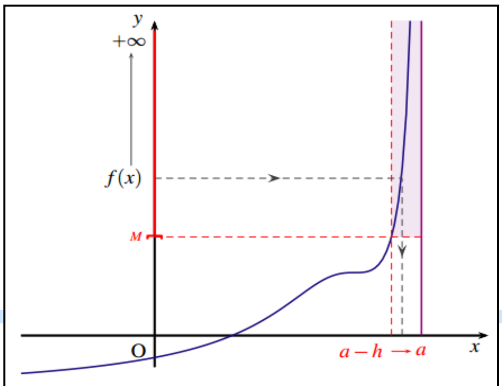
❖ إذا كان كل مجال مفتوح $]-\infty;A[$ يشمل كل قيم f(x) من أجل x قريب بقدر كاف من a، نقول أن الدالة f تؤول إلى $-\infty$ عندما x تؤول إلى a. ونكتب: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

V. نهاية غير منتهية لدالة عن يمين وعن يسار عدد حقيقي:

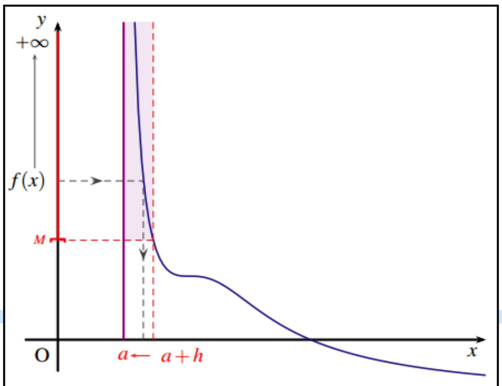
1. تعريف:

لتكن f دالة معرفة عن يمين العدد الحقيقي a (على الترتيب عن يسار a)، وM عدد حقيقي.

القول أن الدالة f تؤول إلى $+\infty$ عندما x تؤول إلى a مع $x > a$ (على الترتيب $x < a$) يعني أن كل مجال مفتوح $]M;+\infty[$ يشمل كل قيم f(x) من أجل x قريب بقدر كاف من a مع $x > a$ (على الترتيب $x < a$). ونكتب: $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = +\infty$ (على الترتيب $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = +\infty$).



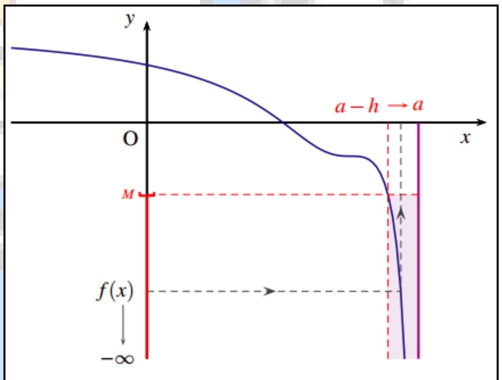
$\lim_{x \xrightarrow{<} a} f(x) = +\infty$



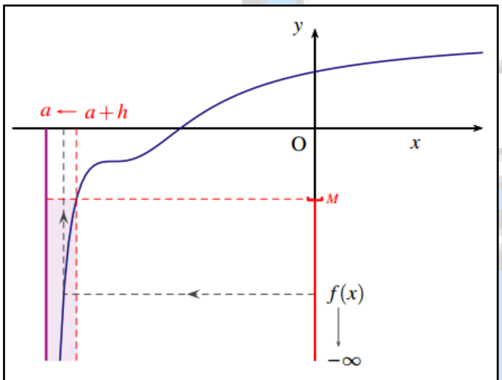
$\lim_{x \xrightarrow{>} a} f(x) = +\infty$

لتكن f دالة معرفة عن يمين العدد الحقيقي a (على الترتيب عن يسار a)، وM عدد حقيقي.

القول أن الدالة f تؤول إلى $-\infty$ عندما x تؤول إلى a مع $x > a$ (على الترتيب $x < a$) يعني أن كل مجال مفتوح $]-\infty; M[$ يشمل كل قيم f(x) من أجل x قريب بقدر كاف من a مع $x > a$ (على الترتيب $x < a$). ونكتب: $\lim_{x \xrightarrow{>} a} f(x) = -\infty$ (على الترتيب $\lim_{x \xrightarrow{<} a} f(x) = -\infty$).



$\lim_{x \xrightarrow{<} a} f(x) = -\infty$



$\lim_{x \xrightarrow{>} a} f(x) = -\infty$

2. المستقيم المقارب:

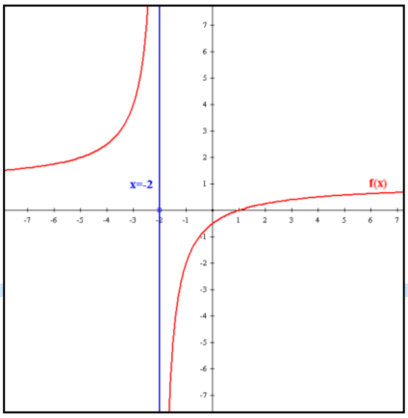
ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في معلم، وليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $x = a$.

إذا كانت $\lim_{x \xrightarrow{>} a} f(x) = \infty$ أو $\lim_{x \xrightarrow{<} a} f(x) = \infty$ ، نقول عندئذ أن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب عمودي للمنحنى (C_f).

3. مثال:

لتكن $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$، بيّن أن المستقيم الذي معادلته x = -2 مستقيم مقارب عمودي لـ $f(x)$.

الحل:



❖ $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} \dfrac{x-1}{x+2} = -\infty$

لأن $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} x-1 = -3$ و $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} x+2 = 0^+$.

❖ $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} \dfrac{x-1}{x+2} = +\infty$

لأن $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} x-1 = -3$ و $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} x+2 = 0^-$.

ومنه فإن المستقيم الذي معادلته $x = -2$ مستقيم مقارب عمودي لـ $f(x)$.

VI. ملخص للمستقيمات المقاربة والفروع اللانهائية:

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f

❖ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \ell$ تعني أن (C) يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته: $y = \ell$ عند ∞ .

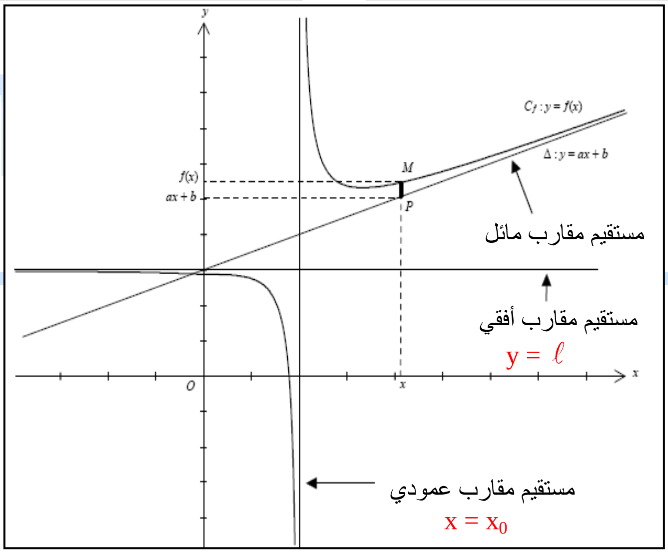
❖ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ تعني أن (C) يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته: $x = x_0$.

❖ $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ تعني (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته: $y = ax+b$.

❖ إذا كانت f معرفة كما يلي: $f(x) = ax+b+\varphi(x)$ مع $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x) = 0$ ، فإن المستقيم ذو المعادلة $y = ax+b$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C).

إذا كانت $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ ، نحسب $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$

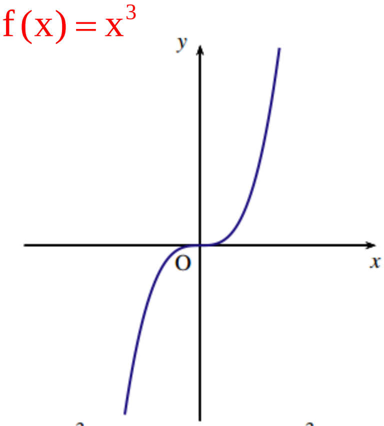
- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$ يعني يوجد فرع لانهائي لقطع مكافئ في اتجاه (yy’)
- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ يعني يوجد فرع لانهائي لقطع مكافئ في اتجاه (xx’)
- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ ، نحسب $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - ax]$
  - $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - ax] = \infty$ ، يوجد فرع لانهائي في اتجاه المستقيم الذي معادلته $y=ax$.
  - $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - ax] = b$ ، مع $b \in \mathbb{R}$ يعني يوجد مستقيم مقارب مائل معادلته $y=ax+b$.



VII. تتمات على النهايات

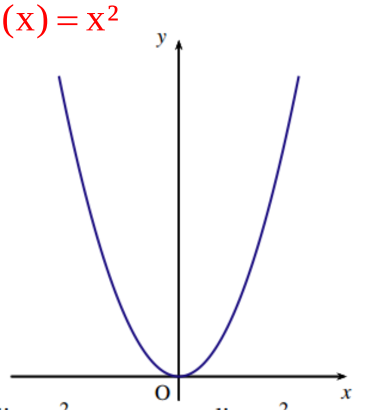
1. نهايات بعض الدوال المرجعية:

$f(x)=x^3$



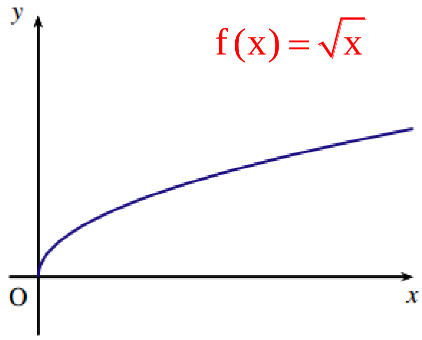
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty\,;\quad \lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

$f(x)=x^2$



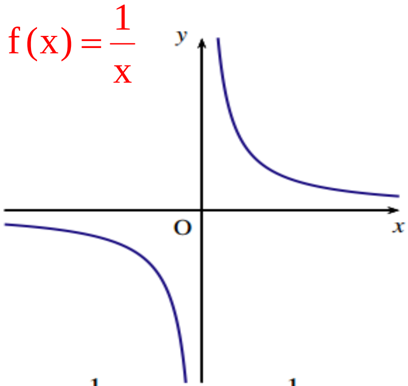
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty\,;\quad \lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

$f(x)=\sqrt{x}$



$\lim\limits_{x\to0} \sqrt{x}=0\,;\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$

$f(x)=\dfrac{1}{x}$



$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}=0\,;\quad \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x}=+\infty\,;\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}=0$

2. العمليات على النهايات:

لما تكون للدالتين f و g نهايات معروفة، نستطيع بصفة عامة استنتاج نهاية الدوال: $f+g,\ f\times g,\ \dfrac{f}{g}$ بسهولة.

النهايات مأخوذة عند ∞ أو عدد حقيقي x_0، كما أن a و a' عددان حقيقيان.

أ. **نهاية مجموع دالتين:**

إذا كانت نهاية f	a	a	a	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
إذا كانت نهاية g	a'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
فإن نهاية f+g	a+a'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ح ع ت

مثال:

❖ لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-1=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ ، ومنه فإن: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-1+\dfrac{1}{x}=+\infty}$.

ب. نهاية جداء دالتين:

$\lim f(x)$	a	$a \neq 0$	∞	0
$\lim g(x)$	a'	∞	∞	∞
$\lim (f \times g)(x)$	$a \times a'$	∞	∞	ح ع ت

ملاحظة: عندما تكون نهاية الجداء ∞، نطبق قواعد إشارة جداء لتعيين إذا كانت $+\infty$ أو $-\infty$.

مثال:

❖ لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} x+1 = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ ، ومنه فإن: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} x(x+1) = +\infty}$.

ج. نهاية حاصل قسمة دالتين:

$\lim f(x)$	a	$a \neq 0$	a	∞	0	∞
$\lim g(x)$	$a' \neq 0$	$a' = 0^+$ $a' = 0^-$	∞	$a' \neq 0$	0	∞
$\lim \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{a}{a'}$	∞	0	∞	ح ع ت	ح ع ت

ملاحظة: عندما تكون نهاية حاصل القسمة ∞، نطبق قواعد إشارة حاصل القسمة لتعيين إذا كانت $+\infty$ أو $-\infty$.

مثال:

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+x = +\infty$ ، ومنه فإن: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+x} = 0}$.

د. حالات عدم التعيين وطرق إزالتها:

مما سبق يمكننا أن نلخص حالات عدم التعيين فيما يلي:

$+\infty - \infty$	$0 \times \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$

لإزالة حالة عدم التعيين، نتبع إحدى الطرق التالية:

❖ الاختزال.

❖ التحليل.

❖ المرافق.

❖ تعريف العدد المشتق.

مثال 1:

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - x^2$.

الحل:

❖ لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ ، ومنه فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - x^2$ حالة عدم تعيين من الشكل $-\infty+\infty$.

❖ من جهة أخرى لدينا من أجل كل $x \neq 0$ ، $x^3 - x^2 = x^3\left(1 - \frac{1}{x}\right)$

وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ ، فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)=+\infty$

ومنه فإن: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-x^2=+\infty}$.

مثال 2:

احسب $\lim\limits_{x\to0^+} x^2\left(\frac{1}{x}-1\right)$.

الحل:

❖ لدينا: $\lim\limits_{x\to0^+} x^2=0$ و $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-1\right)=+\infty$ ، ومنه فإن $\lim\limits_{x\to0^+} x^2\left(\frac{1}{x}-1\right)$ حالة عدم تعيين من الشكل $0\times\infty$.

❖ من جهة أخرى لدينا من أجل كل $x\neq0$ ، $x^2\left(\frac{1}{x}-1\right)=x-x^2$

وبما أن: $\lim\limits_{x\to0^+} x-x^2=0$ ، فإن: $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} x^2\left(\frac{1}{x}-1\right)=0}$.

مثال 3:

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-1}{x^2-1}$.

الحل:

❖ لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-1=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-1=+\infty$ ، ومنه فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-1}{x^2-1}$ حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$.

❖ من جهة أخرى لدينا من أجل كل $x\neq0$ ، $\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{x^3\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{x\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}{1-\frac{1}{x^2}}$ ،

❖ وبما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x^3}=1$ فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{1}{x^3}\right)=+\infty$ ،

❖ وبما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x^2}=1$ ، فإن: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-1}{x^2-1}=+\infty}$.

مثال 4:

احسب $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$.

الحل:

❖ لدينا: $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x^2+1}-1=0$ و $\lim\limits_{x\to0} x=0$ ، ومنه فإن $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$.

❖ نلاحظ أنه بضرب كل من البسط والمقام بـ: $\sqrt{x^2+1}+1$ الذي هو مرافق $\sqrt{x^2+1}-1$ ، نتحصل على:

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\frac{x^2+1-1}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$

$$=\frac{x^2}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

❖ وبما أن: $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2+1}+1=2$ و $\lim\limits_{x\to 0}x=0$ ، فإن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}=0$ ،

ومنه فإن: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=0}$.

مثال 5:

احسب $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-8x+16}{x^2-16}$.

الحل:

❖ لدينا: $\lim\limits_{x\to 4}x^2-8x+16=0$ و $\lim\limits_{x\to 4}x^2-16=0$ ، ومنه فإن $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-8x+16}{x^2-16}$ حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$.

❖ نلاحظ أنه بتطبيق طريقة العدد المشتق (règle de l’hopital) نتحصل على:

$\lim\limits_{x\to 4}\frac{(x^2-8x+16)'}{(x^2-16)'}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{2x-8}{2x}=\frac{0}{8}=0$ ، ومنه فإن: $\boxed{\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-8x+16}{x^2-16}=0}$.

3. نهاية دالة كثيرة حدود أو دالة ناطقة عند ∞:

❖ النهاية عند ∞ لدالة كثيرة حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة عند ∞.
❖ النهاية عند ∞ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند ∞.

أمثلة:

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}-3x^3-2x^2+x-5=\lim\limits_{x\to+\infty}-3x^3=-\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2+3x+1=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x^2-2x^3}{3x^4+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x^3}{3x^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{3x}=0$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x-1}{3x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{3x^2}=\frac{2}{3}$.

4. نهاية دالة مركبة:

❖ f دالة مركبة من دالتين v و u أي $f = v o u$، و a, b, c أعداد حقيقية (منتهية أو غير منتهية)، إذا كانت: $\lim_{x\to a} u(x) = b$ و $\lim_{x\to b} v(X) = c$، فإن: $\lim_{x\to a} f(x) = c$.

أمثلة:

❖ $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1-x} = 0 \ \& \ \lim_{X\to+\infty} X^2 = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{1-x}\right)^2 = +\infty$.

❖ $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = 2 \ \& \ \lim_{X\to 2}\sqrt{X} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2x-1}{x-1}} = \sqrt{2}$.

VIII. النهايات والحصر:

1. الحصر عند نهاية منتهية:

h, g, f دوال عددية معرفة على المجال I، و ℓ عدد حقيقي.

إذا كانت: $g(x) \le f(x) \le h(x)$ من أجل كل x من I، وكانت $\lim_{x\to\infty} g(x) = \ell$ و $\lim_{x\to\infty} h(x) = \ell$،

فإن: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$.

مثال:

برهن أنه عندما: $x > -1$ فإن: $\frac{-1}{x+1} \le \frac{\cos x}{x+1} \le \frac{1}{x+1}$، ثم احسب $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x+1}$.

❖ $x > -1$ ومنه فإن: $x+1 > 0$، كما أن: $-1 < \cos x < 1$، ومنه فإن: $\frac{-1}{x+1} \le \frac{\cos x}{x+1} \le \frac{1}{x+1}$.

❖ بما أن: $\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x+1}$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1}$، فإن $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x+1} = 0}$.

2. الحصر عند نهاية غير منتهية:

g, f دالتان عدديتان معرفتان على المجال I، و ℓ عدد حقيقي.

❖ إذا كانت: $\lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty$ ومهما يكن x من I $f(x) \ge g(x)$، فإن: $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

❖ إذا كانت: $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$ ومهما يكن x من I $f(x) \le g(x)$، فإن: $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

مثال:

لتكن $f(x) = x + \sin x$ أحسب $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

❖ من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $-1 \le \sin x \le 1$، ومنه فإن: $-1+x \le x+\sin x \le 1+x$ أي $-1+x \le f(x) \le 1+x$.

❖ بما أن: $\lim_{x\to-\infty}(1+x) = -\infty$ و $f(x) \le 1+x$، فإن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

❖ بما أن: $\lim_{x\to+\infty}(-1+x) = +\infty$ و $-1+x \le f(x)$، فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

تمّ بحمد الله وتوفيقه