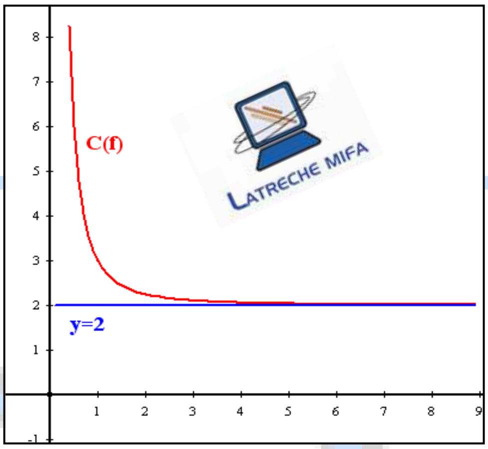
حلول التمارين حول النهـايـات -الجزء 1-

فهرس حلول التمارين

حل التمرين 1:

(1



$f(1)=\frac{2\times 1^2+1}{1^2}=3.$

$f(10)=\frac{2\times 10^2+1}{10^2}=\frac{201}{100}=2{,}01.$

$f(100)=\frac{2\times 100^2+1}{100^2}=\frac{20001}{10000}=2{,}0001\ .$

$f(3234)=\frac{2\times 3234^2+1}{3234^2}\approx 2.$

2) من خلال ملاحظة التمثيل البياني للدالة f، وحساب مختلف قيم f(x) من أجل x كبير بقدر كاف، نلاحظ أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

3) نلاحظ أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ يمكننا كتابة f(x) على الشكل التالي: $f(x)=\frac{2x^2+1}{x^2}=\frac{2x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}=2+\frac{1}{x^2}$.

❖ من أجل $x>10$ فإن $x^2>100$ (لأن الدالة مربع متزايدة في المجال $]0;+\infty[$)،

ومنه فإن: $\frac{1}{x^2}<\frac{1}{100}$ (لأن الدالة مقلوب متناقصة في المجال $]0;+\infty[$)،

ومنه فإن: $2+\frac{1}{x^2}<2+\frac{1}{100}$، ومنه فإن: $f(x)<2{,}01$ .....(1).

❖ من جهة أخرى لدينا من أجل كل x ينتمي إلى $]0;+\infty[$ لدينا: $\frac{1}{x^2}>0$ ومنه فإن: $2+\frac{1}{x^2}>2$،

أي $f(x)>2$ ومنه فإن: $f(x)>1{,}99$ ....(2).

❖ من (1) و(2) نستنتج: $x>10 \Leftrightarrow f(x)\in\ ]1{,}99;2{,}01[$.

4) $r>10$ و f(x) تنتمي إلى المجال $]2-r;2+r[$ معناه أن:

❖ $f(x)<2+r \Leftrightarrow 2+\frac{1}{x^2}<2+r \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}<r \Leftrightarrow x^2>\frac{1}{r} \Leftrightarrow x>\sqrt{\frac{1}{r}}$ ....(1)

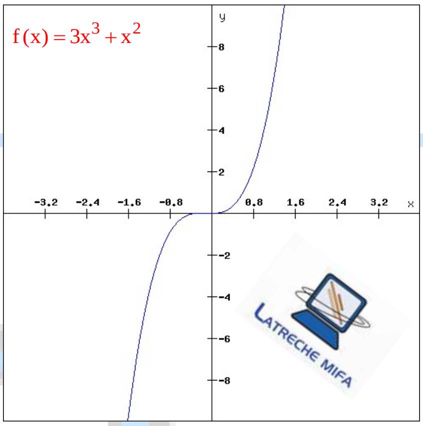
❖ $x>0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}>0 \Leftrightarrow 2+\frac{1}{x^2}>2 \Leftrightarrow f(x)>2 \Leftrightarrow f(x)>2-r$ .....(2)

من (1) و(2) نستنتج أنه من أجل $x>\sqrt{\frac{1}{r}}$، كل قيم f(x) تنتمي إلى المجال $]2-r;2+r[$.

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2.$

حل التمرين 2:

1)لدينا: $f(x)=3x^3+x^2$.



$f(1)=3\times1^3+1^2=4$.

$f(10)=3\times10^3+10^2=3100$.

$f(100)=3\times100^3+100^2=3\,010\,000$.

$f(5812)=3\times5812^3+5812^2=589\,010\,421\,328$.

2)من خلال ملاحظة التمثيل البياني للدالة f، وحساب مختلف قيم f(x) من أجل x كبير بقدر كاف، نلاحظ أن: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

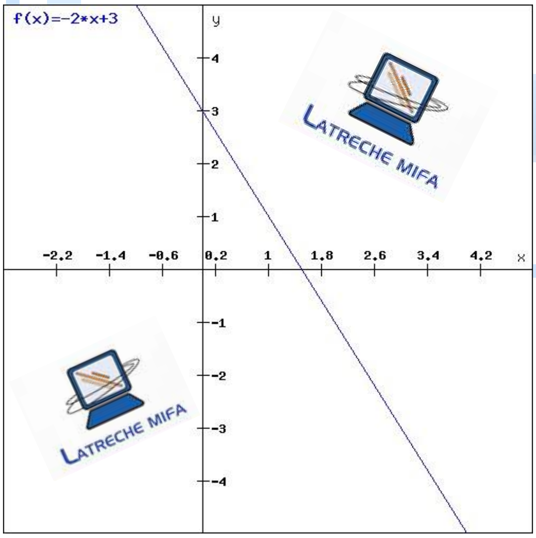
3)من أجل $x>10$ فإن $x^2>100$ (لأن الدالة مربع متزايدة في المجال $]0;+\infty[$)، و $3x^3>0$، ومنه فإن $3x^3+x^2>100$ أي أن: $f(x)\in]100;+\infty[$.

4)من أجل $x>\sqrt{A}$ و $A>0$ فإن $x^2>A$ و $3x^3>0$، ومنه فإن $3x^3+x^2>A$ أي أن: $f(x)\in]A;+\infty[$.

حل التمرين 3:

لدينا: $f(x)=-2x+3$.

لكي نبرهن أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ، يجب أن نبرهن أنه من أجل $x\in]A;+\infty[$ مع A كبير جدا، فإن كل قيم f(x) تنتمي إلى $]-\infty;A[$.



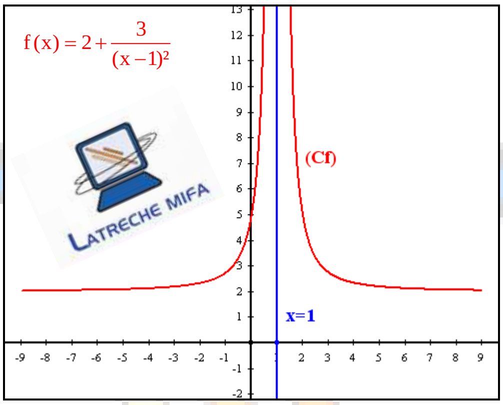
$$x\in]A;+\infty[\Leftrightarrow x>A\Leftrightarrow 2x>2A$$
$$\Leftrightarrow -2x<-2A$$
$$\Leftrightarrow -2x+3<-2A+3.$$
$$\Leftrightarrow f(x)<-2A+3$$
$$\Leftrightarrow f(x)<A$$

و هذا معناه أن f(x) تنتمي إلى $]-\infty;A[$ أي $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

حل التمرين 4:

1) $f(x)=2+\frac{3}{(x-1)^2}$ ومنه فإن f تكون معرفة إذا كانت $(x-1)^2\neq 0$ أي $x\neq 1$، ومنه فإن مجموعة تعريف الدالة f هي: $\boxed{D_f=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[}$.

2) من خلال ملاحظة التمثيل البياني للدالة f، نلاحظ أن: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$.



3)

$$f(x)\in]1000;+\infty[\Leftrightarrow 2+\frac{3}{(x-1)^2}>1000\Leftrightarrow\frac{3}{(x-1)^2}>998\Leftrightarrow\frac{1}{(x-1)^2}>\frac{998}{3}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2<\frac{3}{998}\Leftrightarrow (x-1)^2-\frac{3}{998}<0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-1-\sqrt{\frac{3}{998}}\right)\left(x-1+\sqrt{\frac{3}{998}}\right)<0$$

جدول الإشارة:

x	$-\infty$		$1-\sqrt{\frac{3}{998}}$		$1+\sqrt{\frac{3}{998}}$		$+\infty$
$x-1-\sqrt{\frac{3}{998}}$		-	0	+			
$x-1+\sqrt{\frac{3}{998}}$				-	0	+	
$\left(x-1-\sqrt{\frac{3}{998}}\right)\left(x-1+\sqrt{\frac{3}{998}}\right)$		+	0	-	0	+	

من خلال جدول الإشارة يمكننا أن نستنتج أن: $f(x)\in]1000;+\infty[\Leftrightarrow x\in\left]1-\sqrt{\frac{3}{998}};1+\sqrt{\frac{3}{998}}\right[$.

4) $f(x)$ تنتمي إلى المجال $]A;+\infty[$ مع $A>2$:

❖ $f(x)\in]A;+\infty[\Leftrightarrow 2+\frac{3}{(x-1)^2}>A\Leftrightarrow\frac{3}{(x-1)^2}>A-2\Leftrightarrow\frac{1}{(x-1)^2}>\frac{A-2}{3}$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2<\frac{3}{A-2}\Leftrightarrow (x-1)^2-\frac{3}{A-2}<0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-1-\sqrt{\frac{3}{A-2}}\right)\left(x-1+\sqrt{\frac{3}{A-2}}\right)<0$$

من خلال السؤال السابق يمكننا أن نستنتج أن: $f(x)\in]A;+\infty[\Leftrightarrow x\in\left]1-\sqrt{\frac{3}{A-2}};1+\sqrt{\frac{3}{A-2}}\right[$.

من هنا نستنتج أنه كلما كان x قريبا من 1 فإن $f(x)>A$، و هذا مهما تكن قيمة العدد A المختارة. و هذا معناه أن $\lim_{x\to 1}f(x)=+\infty$.

حل التمرين 5:

لدينا: $f(x)=1+x+\sin x$.

❖ نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $-1\le\sin x\le 1$،

و منه فإن: $1+x-1\le 1+x+\sin x\le 1+x+x$،

أي أن: $x\le f(x)\le x+2$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$.

❖ من جهة أخرى نعلم أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا: $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$. وبما أن $f(x)\ge x$،

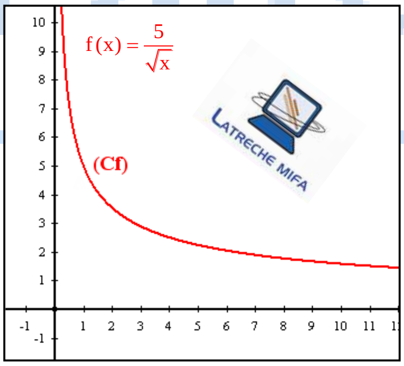
فإن: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

حل التمرين 6:

f معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{5}{\sqrt{x}}$.

1) من خلال ملاحظة التمثيل البياني للدالة f، نلاحظ أن:

$\lim_{x\overset{>}{\to}0}f(x)=+\infty$.



البرهان:

ليكن العدد A حيث $A > 0$.

$$f(x)\in\left]A;+\infty\right[\Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{x}}>A \Leftrightarrow \frac{25}{x}>A^2 \Leftrightarrow x<\frac{25}{A^2}.$$

وهذا معناه أنه إذا كان $x\in\left]0;\frac{25}{A^2}\right[$ فإن $f(x)\in\left]A;+\infty\right[$. ومن هنا نستنتج أنه من أجل x قريب جدا من 0، فإن $f(x) > A$، مهما كانت قيم A المختارة. ومنه فإن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=+\infty$.

2) g معرفة على المجال $\left]0;+\infty\right[$ بـ: $g(x)=\frac{5}{\sqrt{x}}+5+\cos\frac{1}{x}$.

❖ نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي α لدينا: $-1\le\cos\alpha\le 1$،

ومنه فإن: $-1\le\cos\frac{1}{x}\le 1$ من أجل كل $x\in\left]0;+\infty\right[$.

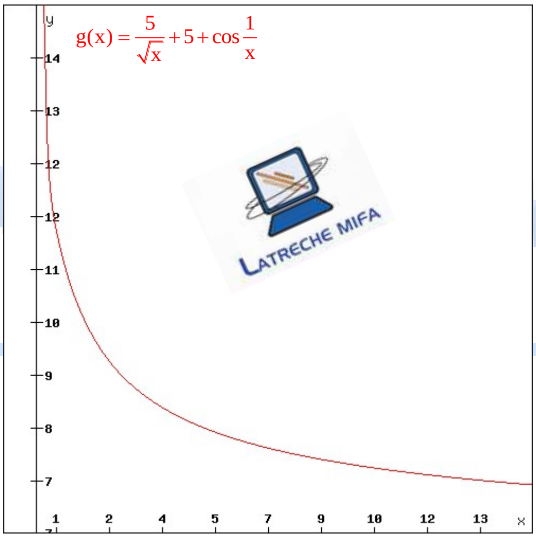
وبما أن: $\frac{5}{\sqrt{x}}+5>0$، فبإضافة $\frac{5}{\sqrt{x}}+5$ إلى طرفي المتراجحة نتحصل على:

$$\frac{5}{\sqrt{x}}+5-1\le\frac{5}{\sqrt{x}}+5+\cos\frac{1}{x}\le\frac{5}{\sqrt{x}}+5+1$$

أي أن: $\frac{5}{\sqrt{x}}+4\le g(x)\le\frac{5}{\sqrt{x}}+6$.

إذن من أجل كل $x\in\left]0;+\infty\right[$ لدينا $g(x)\ge\frac{5}{\sqrt{x}}+4\ge f(x)$.

❖ من السؤال الأول لدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=+\infty$، ومما سبق لدينا: $g(x)\ge f(x)$، ومنه وبتطبيق قاعدة الترتيب في النهايات فإن: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=+\infty$.



حل التمرين 7:

- $\lim\limits_{x\to4}\sqrt{x}=\sqrt{4}=2$ & $\lim\limits_{x\to4}x=4 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to4}\sqrt{x}+x=6$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty}x+1=-\infty$ & $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}x(x+1)=+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2+1=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2+1}=0^+$.
- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ & $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}x=\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$.
- $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\sqrt{x}=0$ & $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}x^2+1=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}=0$.

حل التمرين 8:

- $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}x-3=-2$ & $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}x^2-1=0^- \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\dfrac{x-3}{x^2-1}=+\infty$.
- $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}x-1=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-1}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}x+1=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1}=0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}=0.$$

$$\lim\limits_{x\to+\infty}x+\sqrt{x}=+\infty$$

ومنه نستنتج أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}}{x+\sqrt{x}}=0$.

- نلاحظ أن: $\lim\limits_{x\to2}x^2-x-2=0$ ، ومنه لحساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}\dfrac{2x+5}{x^2-x-2}$ يجب معرفة إشارة x^2-x-2.

x^2-x-2 كثير حدود من الدرجة الثانية جذراه هما: 2 و(-1). قواعد إشارة x^2-x-2 تبين أنه عندما يؤول x إلى 2 بقيم أصغر من 2، فإن: $x^2-x-2<0$. ومنه نستنتج أن: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}x^2-x-2=0^-$.

من جهة أخرى لدينا: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}2x+5=9$ ومنه فإن: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}\dfrac{2x+5}{x^2-x-2}=-\infty$.

- $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{1}{\sqrt{x}}+1=+\infty$ & $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}x+\sqrt{x}=0^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}+1}{x+\sqrt{x}}=+\infty$.

حل التمرين 9:

(1

- $\lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} x^3+5=5.$
- $\lim\limits_{x\to 0} x^3+x=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} x^3+x+1=1.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}+2=2.$
- $\lim\limits_{x\to 0} x^3-3=-3$ & $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} \frac{1}{x}=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} x^3-3+\frac{1}{x}=+\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0} x^3-3=-3$ & $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} \frac{1}{x}=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} x^3-3+\frac{1}{x}=-\infty.$

(2

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x^3+5=+\infty.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ & $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x^3+x+1=+\infty.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}+2=+\infty.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-3=+\infty$ & $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x^3-3+\frac{1}{x}=+\infty.$

حل التمرين 10:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}=0$ & $\lim\limits_{x\to-\infty} x-1=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}+x-1=-\infty.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ & $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x^2+x+1=+\infty.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ & $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x+\frac{1}{x}=+\infty.$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ & $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} x-\frac{1}{x}=-\infty.$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ & $\lim\limits_{x\to-\infty} x+1=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} x(x+1)=+\infty.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ & $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)=+\infty.$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x-1)=-\infty$ & $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2-5)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} (2x-1)(x^2-5)=-\infty.$
- $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} \left(2+\frac{1}{x}\right)=+\infty$ & $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} (2x-3)=-3 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} \left(2+\frac{1}{x}\right)(2x-3)=-\infty.$

حل التمرين 11:

(1

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ & $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\right)=+\infty$.

❖ $x^2\left(1-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\right)=x^2-\frac{3x^2}{x}-\frac{2x^2}{x^2}=x^2-3x-2$ ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-3x-2=+\infty$ ،.

(2

❖ $x^3+3x^2-5x+1=x^3\left(1+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)$

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ & $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} x^3+3x^2-5x+1=-\infty$.

حل التمرين 12:

1) لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2)=-\infty$ ، ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-x^2$ تؤول إلى حالة عدم تعيين $\infty-\infty$.

من جهة أخرى نلاحظ أنه يمكن كتابة: $x^3-x^2=x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)$ ،

وبما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x}=1$ ، نستنتج أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-x^2=+\infty$.

2) لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3+x=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ & $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$.

ولدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ & $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$. ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+x$ تؤول إلى حالة عدم تعيين $\infty-\infty$.

من جهة أخرى لدينا من أجل $x\neq 0$ ، $x^3+x=x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ و $x^2+x=x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)$

ومنه فإن: $\frac{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{1+\frac{1}{x}}=\left(\frac{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)=\frac{x^3+x}{x^2+x}$.

وبما أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} 1+\frac{1}{x^2}=1$ & $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$

و $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\frac{1}{x}=1$ ، فإن: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3+x}{x^2+x}=-\infty$.

3) لدينا $\lim\limits_{x\to 2} x^2+x-6=2^2+2-6=0$ و $\lim\limits_{x\to 2} x^2-5x+6=2^2-10+6=0$ ،

ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-5x+6}$ تؤول إلى حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$.

من جهة أخرى نلاحظ أن 2 هو حل مشترك لكل من: x^2+x-6 و x^2-5x+6 ومنه يمكن تحليل كل منهما إلى جداء.

لدينا: $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$ و $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ ،

ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{x-3}=\dfrac{5}{-1}=-5$.

4) لدينا: $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2+1}-1=0$ و $\lim\limits_{x\to 0}x=0$ ، ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ تؤول إلى حالة عدم تعيين $\dfrac{0}{0}$.

من جهة أخرى نلاحظ أنه يمكن كتابة:

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\frac{x^2}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}\text{ ،}$$

ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}=\dfrac{0}{2}=0$.

حل التمرين 13:

❖ نلاحظ أن: $\lim\limits_{x\to -\infty}x^3+2x^2+1$ تؤول إلى حالة عدم تعيين $+\infty-\infty$ ،

وأنه يمكن كتابة: $x^3+2x^2+1=x^3\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)$.

وبما أن: $\lim\limits_{x\to -\infty}x^3=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to -\infty}1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^3}=1$ ، فإن: $\lim\limits_{x\to -\infty}x^3+2x^2+1=-\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{1+x^2}{\sqrt{x}}=+\infty$ لأن: $\left(\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}1+x^2=1\right.$ و $\left.\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\sqrt{x}=0^+\right)$.

❖ لدينا: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1}x^2+x+3=3$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1}x^2-2x-3=0$ ،

من جهة أخرى نلاحظ أنه يمكن كتابة: $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$ ، وأنه عندما يكون $x<-1$ فإن: $x^2-2x-3>0$. ومنه فإن: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1}x^2-2x-3=0^+$.

إذن: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1}\dfrac{x^2+x+3}{x^2-2x-3}=+\infty$.

❖ لدينا: $\lim\limits_{x\to +\infty}x^2+1+\dfrac{1}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to +\infty}x^3+3x=+\infty$ ، ومنه فإن $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+1+\dfrac{1}{x}}{x^3+3x}$ تؤول إلى حالة عدم تعيين $\dfrac{\infty}{\infty}$.

من جهة أخرى نلاحظ أنه يمكن كتابة: $\frac{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{x\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}=\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}=\frac{x^2+1+\frac{1}{x}}{x^3+3x}$ ،

وبما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{3}{x^2}\right)=+\infty$ ،

فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1+\frac{1}{x}}{x^3+3x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{x\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}=0$.

❖ لدينا: $\lim\limits_{x\to1} x^2-3x+2=0$ و $\lim\limits_{x\to1} x^3-1=0$ ، ومنه فإن $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^3-1}$ تؤول إلى حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$.

من جهة أخرى نلاحظ أن 1 هو حل مشترك لكل من: x^2-3x+2 و x^3-1

ومنه يمكن كتابة: $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ و $x^3-1=(x-1)(x^2+x+x)$.

من هنا يكون لدينا: $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x-2}{x^2+x+1}=-\frac{1}{3}$.

حل التمرين 14:

❖ $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x+1}=1.$

❖ $x>0\Leftrightarrow x^5>0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{x^5}=+\infty.$

❖ $x<0\Leftrightarrow x^5<0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\frac{1}{x^5}=-\infty.$

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

❖ لا يمكن دراسة $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\frac{1}{\sqrt{x}}$ لأن $\sqrt{x}$ معرفة فقط من أجل $x\geq0$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} 1+\frac{1}{x}=+\infty$

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} 1+\frac{1}{x}=-\infty.$

❖ نلاحظ أن: $\lim\limits_{x\to0} x=0$ ، كما نلاحظ أنه يمكن كتابة: $\frac{x+1}{x^2}=(x+1)\times\frac{1}{x^2}$.

ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to0} x+1=1\Leftrightarrow(x+1)\times\frac{1}{x^2}=+\infty$ & $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}=+\infty$. ومنه نستنتج أن: $\lim\limits_{x\to0}\frac{x+1}{x^2}=+\infty$.

❖ $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x-1}-1=-2$.

❖ $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ & $\lim_{x\to 0}x=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}x+\frac{1}{x^2}=+\infty$.

❖لدينا: $\lim_{x\to 0}\left(x-\frac{1}{x}\right)=-\infty$ و $\lim_{x\to 0}\left(x+\frac{1}{x}\right)=+\infty$ ،

ومنه فإن $\lim_{x\to 0}\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)$ تؤول إلى حالة عدم تعيين $\infty\times\infty$.

نلاحظ أنه يمكن كتابة: $\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2-\frac{1}{x^2}$ ،

ومنه يصبح لدينا: $\lim_{x\to 0}x^2=0$ & $\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}x^2-\frac{1}{x^2}=-\infty$ ،

ومنه نستنتج أن: $\lim_{x\to 0}\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=-\infty$.

❖نلاحظ أن: $\lim_{x\to 0}x=0$ ، كما نلاحظ أنه يمكن كتابة: $\frac{1-x}{x^2}=(1-x)\times\frac{1}{x^2}$ ،

وبما أن: $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ و $\lim_{x\to 0}1-x=1$ ، فإن: $\lim_{x\to 0}(1-x)\times\frac{1}{x^2}=+\infty$ ومنه فإن: $\lim_{x\to 0}\frac{1-x}{x^2}=+\infty$.

حل التمرين 15:

❖ $\lim_{x\to 4}\sqrt{x}+x=2+4=6$.

❖ $\lim_{x\to-\infty}x+1=-\infty$ & $\lim_{x\to-\infty}x=-\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty}x(x+1)=+\infty$.

❖ $\lim_{x\to+\infty}x^2+1=+\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$.

❖ $\lim_{x\xrightarrow{>}0}x^2+1=1$ & $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow \lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}=0$.

حل التمرين 16:

❖ $\lim_{x\to 2}(x-2)^2=0^+ \Leftrightarrow \lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}=+\infty$.

❖ $\lim_{x\to 3}\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{9+1}=\frac{1}{10}$.

❖ $\lim_{x\xrightarrow{>}1}x-1=0^+ \Leftrightarrow \lim_{x\xrightarrow{>}1}\frac{1}{x-1}=+\infty$.

❖ $\lim_{x\to-1}(x+1)^2=0^+ \Leftrightarrow \lim_{x\to-1}\frac{2}{(x+1)^2}=+\infty$.

❖ $x>-1 \Leftrightarrow x+1>0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} \frac{1}{x+1}=+\infty$ و $x<-1 \Leftrightarrow x+1<0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} \frac{1}{x+1}=-\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{x-1}{2x+1}=\frac{\frac{1}{2}-1}{1+1}=\frac{-\frac{1}{2}}{2}=-\frac{1}{4}$.

❖ نلاحظ أن: $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(2x-1)^2=0$ ، كما نلاحظ أنه يمكن كتابة: $\frac{x-1}{(2x-1)^2}=(x-1)\times\frac{1}{(2x-1)^2}$ ،

وبما أن: $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} x-1=-\frac{1}{2}$ ، و $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1}{(2x-1)^2}=+\infty$ ،

فإن: $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} x-1=-\frac{1}{2} \ \& \ \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1}{(2x-1)^2}=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(x-1)\times\frac{1}{(2x-1)^2}=-\infty$.

ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{x-1}{(2x-1)^2}=-\infty$.

❖ $x>3\Leftrightarrow x-3>0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}3}\frac{-1}{x-3}=-\infty$ و $x<3\Leftrightarrow x-3<0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{<}3}\frac{-1}{x-3}=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{x+3}=\frac{0}{3}=0$.

❖ نلاحظ أن: $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}2x-1=0$ ، كما نلاحظ أنه يمكن كتابة: $\frac{x-1}{2x-1}=(x-1)\times\frac{1}{2x-1}$ ،

ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}x-1=-\frac{1}{2} \ \& \ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}}\frac{1}{2x-1}=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}}(x-1)\times\frac{1}{2x-1}=-\infty$

و $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}x-1=-\frac{1}{2} \ \& \ \lim\limits_{x\xrightarrow{<}\frac{1}{2}}\frac{1}{2x-1}=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{<}\frac{1}{2}}(x-1)\times\frac{1}{2x-1}=+\infty$.

ومنه نستنتج أن: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}\frac{1}{2}}\frac{x-1}{2x-1}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}}\frac{x-1}{2x-1}=-\infty$.

حل التمرين 17:

❖ نلاحظ أن $\lim\limits_{x\to2}2-x=0$ ، كما نلاحظ أنه يمكن كتابة: $\frac{x}{2-x}=x\left(\frac{1}{2-x}\right)$ ،

وبما أن: $\lim\limits_{x\to2}x=2 \ \& \ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}2}\frac{1}{2-x}=-\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2}x\left(\frac{1}{2-x}\right)=-\infty$ ،

و $\lim\limits_{x\to2}x=2 \ \& \ \lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}\frac{1}{2-x}=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}x\left(\frac{1}{2-x}\right)=+\infty$.

فإن: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2}\frac{x}{2-x}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}\frac{x}{2-x}=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-5}{x^2+x-2}=\dfrac{-5}{-2}=\dfrac{5}{2}$.

❖ نلاحظ أن: $\lim\limits_{x\to1}x^2+x-2=0$، كما نلاحظ أن 1 و (-2) هما جذران لـ x^2+x-2، ويمكن كتابة: $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$. من خلال جدول الإشارة نلاحظ أن:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		+	0	-	0	+	

عندما يؤول x إلى 1 مع $x<1$، فإن $x\in]-2;1[$، ومنه فإن $x^2+x-2<0$.

عندما يؤول x إلى 1 مع $x>1$، فإن $x\in]1;+\infty[$، ومنه فإن $x^2+x-2>0$.

ومنه نستنتج أن:

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\dfrac{x-5}{x^2+x-2}=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\dfrac{1}{x^2+x-2}=-\infty$ & $\lim\limits_{x\to1}x-5=-4$،

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\dfrac{x-5}{x^2+x-2}=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\dfrac{1}{x^2+x-2}=+\infty$ & $\lim\limits_{x\to1}x-5=-4$.

❖ من خلال السؤال السابق لدينا: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-2}\dfrac{1}{x^2+x-2}=+\infty$ ، و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2}\dfrac{1}{x^2+x-2}=-\infty$ ،

وبما أن: $\lim\limits_{x\to-2}x-5=-7$ فإن: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-2}\dfrac{x-5}{x^2+x-2}=-\infty$ ، و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2}\dfrac{x-5}{x^2+x-2}=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x-5}{x^2+x-2}=\dfrac{0}{28}=0$.

حل التمرين 18:

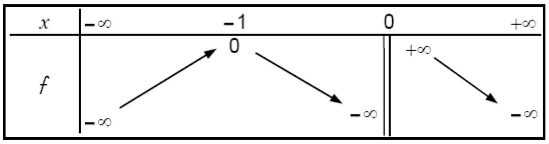
❖ $\lim\limits_{x\to0}2+x^2=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0}\sqrt{\dfrac{1}{2+x^2}}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{1}{x}=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3+x^2}=+\infty$.

❖ $x<-2 \Leftrightarrow x^2-4>0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{<}-2}\sqrt{\dfrac{1}{x^2-4}}=+\infty$.

حل التمرين 19:



من خلال جدول التغيرات نلاحظ أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=-\infty$

و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ، ومنه فإن:

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ & $\lim\limits_{X\to+\infty} f(X)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\sqrt{x}\right)=-\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\dfrac{1}{x}\right)=-1$ & $\lim\limits_{X\to-1} f(X)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f\left(-1+\dfrac{1}{x}\right)=0$.

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-1+\dfrac{1}{x}\right)=-1$ & $\lim\limits_{X\to-1} f(X)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f\left(-1+\dfrac{1}{x}\right)=0$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{1}{x}=-\infty$ & $\lim\limits_{X\to-\infty} f(X)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-1}{x^2+1}\right)=0^+$ & $\lim\limits_{X\xrightarrow{<}0} f(X)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{-1}{x^2+1}\right)=-\infty$.

❖ لدينا $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=0$ ، ولدينا أيضا من خلال جدول التغيرات:

$x\in\left]-\infty;0\right[\Leftrightarrow f(x)\le 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=0^- \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2-x^2}{2+x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-x^2}{x^2}\right)=-1$ & $\lim\limits_{X\to-1} f(X)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{2-x^2}{2+x^2}\right)=0$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{2x-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{2x}\right)=+\infty$ & $\lim\limits_{X\to+\infty} f(X)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{x^2+1}{2x-1}\right)=-\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+3=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)+3}=0$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)+3=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{1}{f(x)+3}=0$.

حل التمرين 20:

1) لتكن الدالة f حيث من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم لدينا: $f(x) \geq x^2 + x + \frac{1}{x}$.

❖ لدينا: $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} x^2 + x = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$، ومنه فإن: $\lim_{x\to-\infty} x^2 + x + \frac{1}{x} = +\infty$. وبما أن $f(x) \geq x^2 + x + \frac{1}{x}$ من أجل كل $x \neq 0$، نستنتج أن: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

❖ لدينا: $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} x^2 + x = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} x^2 = 0$ و $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{x} = +\infty$، ومنه فإن: $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} x^2 + x + \frac{1}{x} = +\infty$. وبما أن $f(x) \geq x^2 + x + \frac{1}{x}$ من أجل كل $x \neq 0$، نستنتج أن: $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = +\infty$.

❖ لدينا: $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} x^2 + x = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} x^2 = 0$ و $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{1}{x} = -\infty$، ومنه فإن: $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} x^2 + x + \frac{1}{x} = -\infty$.
ومنه فلا يمكن استنتاج أي شيء بالنسبة لـ: $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)$.

❖ لدينا: $\lim_{x\to+\infty} x^2 + x = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$، ومنه فإن: $\lim_{x\to+\infty} x^2 + x + \frac{1}{x} = +\infty$. وبما أن $f(x) \geq x^2 + x + \frac{1}{x}$ من أجل كل $x \neq 0$، نستنتج أن: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2) لتكن الدالة g حيث من أجل كل $x \in]100;+\infty[$ لدينا: $\frac{3-x}{5-2x} \leq g(x) \leq \frac{x^2+x-3}{2x^2-5}$.

❖ لا يمكن استنتاج أي شيء عن $\lim_{x\to 0} g(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ لأن المتباينة صحيحة من أجل: $x \in]100;+\infty[$.

❖ لدينا: $\lim_{x\to+\infty} \frac{3-x}{5-2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{-2x} = \frac{1}{2}$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-3}{2x^2-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$، وبما أن النهايتين متساويتان فإن: $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{1}{2}$.

حل التمرين 21:

لدينا: $f(x) = \frac{3x+5}{x-4}$.

1) الدالة f معرفة من أجل كل $x \neq 4$. ومنه فإن مجموعة تعريفها هي: $D_f =]-8;4[\cup]4;+\infty[$ أو: $D_f = \mathbb{R} - \{4\}$.

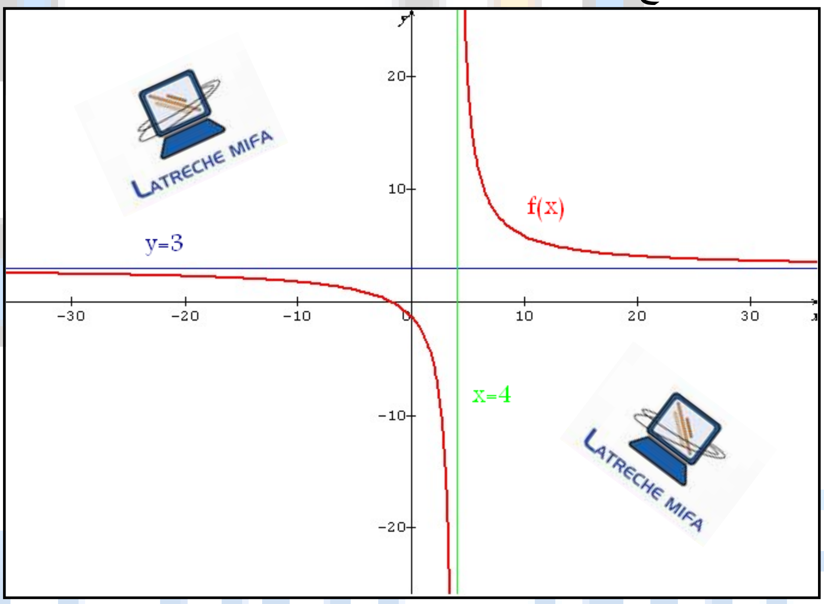
2) حساب النهايات عند حدود مجموعة التعريف:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+5}{x-4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x}{x}=3.$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+5}{x-4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x}{x}=3.$
- $\lim\limits_{x\to4} 3x+5=17$ & $\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}4} x-4=0^- \Leftrightarrow \lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}4} f(x)=-\infty.$
- $\lim\limits_{x\to4} 3x+5=17$ & $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}4} x-4=0^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}4} f(x)=+\infty.$

3) المستقيمات المقاربة لـ (C_f) التمثيل البياني للدالة f:

- لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$ ، ومنه فإن (C_f) يقبل عند ∞ مستقيما مقاربا موازيا لمحور الفواصل معادلته: $y=3$.
- لدينا: $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}4} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}4} f(x)=-\infty$ ، ومنه فإن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب معادلته: $x=4$.

4) التأكد من صحة النتائج المتحصل عليها:



حل التمرين 22:

لدينا: $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x-2}$.

1) الدالة f معرفة من أجل كل $x\neq 2$. ومنه فإن مجموعة تعريفها هي: $D_f=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ أو: $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-1)^2}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x-1)^2}{x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x}=-\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to2}(x-1)^2=1$ & $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} x-2=0^-\Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} f(x)=-\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to2}(x-1)^2=1$ & $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2} x-2=0^+\Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}2} f(x)=+\infty$.

2) من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 2$ ، لدينا:

$f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x-2}=\dfrac{x^2-2x+1}{x-2}=\dfrac{x(x-2)+1}{x-2}=x+\dfrac{1}{x-2}$ ،

إذن من أجل كل $x\neq 2$ لدينا $f(x)=x+\dfrac{1}{x-2}$.

3) المستقيمات المقاربة لـ (C_f) التمثيل البياني للدالة f:

❖ لدينا: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} f(x)=-\infty$ ، ومنه فإن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب معادلته: $x=2$.

❖ من جهة أخرى لدينا: $f(x)=x+\dfrac{1}{x-2}$ مع $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$ ، ومنه فإن (C_f) يقبل المستقيم الذي معادلته: $y=x$ مستقيما مقاربا مائلا عند ∞ .

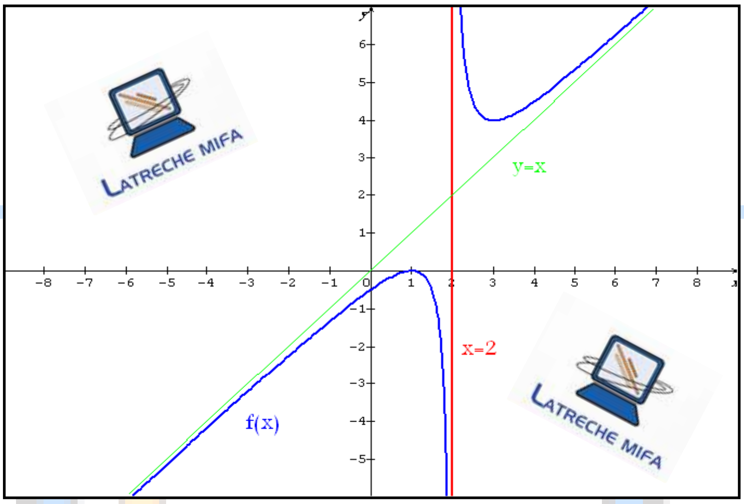
4) لدينا: $f(x)=x+\dfrac{1}{x-2}$ ومنه فإن: $f(x)-x=\dfrac{1}{x-2}$.

❖ $x>2$ معناه $x-2>0$ ، و هذا معناه $\dfrac{1}{x-2}>0$ ، ومنه فإن: $f(x)-x>0$.

❖ $x<2$ معناه $x-2<0$ ، و هذا معناه $\dfrac{1}{x-2}<0$ ، ومنه فإن: $f(x)-x<0$.

❖ التفسير الهندسي لهذه المتراجحات هو: أن (C_f) يقع فوق المستقيم ذي المعادلة $y=x$ عندما يكون $x\in]2;+\infty[$ ، و أن (C_f) يقع تحت المستقيم ذي المعادلة $y=x$ عندما يكون $x\in]-\infty;2[$.

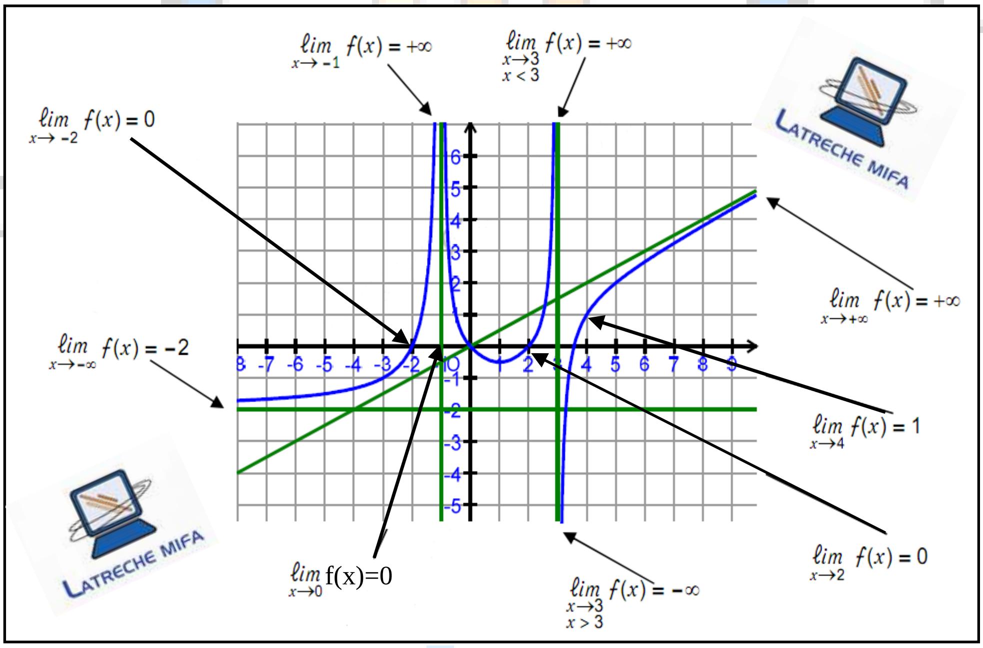
5) التأكد من صحة النتائج المتحصل عليها:



حل التمرين 23:

الشكل التالي هو التمثيل البياني لدالة f (باللون الأزرق):

1) من خلال الشكل يمكننا أن نستنتج أن:



❖ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$.　$\lim_{x \to -2} f(x) = 0$.　$\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$

❖ $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.　$\lim_{x \to 2} f(x) = 0$.　$\lim_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = +\infty$.

❖ $\lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = -\infty$.　$\lim_{x \to 4} f(x) = 1$.　$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2) المستقيمات المقاربة لـ (C_f):

❖ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$ ومنه فإن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور الفواصل معادلته: $y = -2$ عند $-\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = +\infty$ ومنه فإن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب معادلته: $x = -1$.

❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} f(x) = -\infty$ ومنه فإن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب معادلته: $x = 3$.

❖ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ ، ومن خلال الشكل يمكننا أن نستنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته: $y = \frac{1}{2}x$ عند $+\infty$.