حلول تمارين حول النهايات -الجزء 2-

فهرس حلول التمارين

حل التمرين 1:

1) نعلم أن النهاية عند $\pm\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة في البسط والمقام. ومنه فإن:

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4x^6-3x^2+11}{-4x^7-3x^2+11}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4x^6}{-4x^7}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0.$

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{25-3x^2-2x^5}{3x^2-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^5}{3x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{3}x^3=-\infty.$

2) نلاحظ أن $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{7+x}-\sqrt{7-x}}{x}$ تؤول إلى حالة عدم تعيين $\dfrac{0}{0}$ ، ولإزالتها يجب ضرب البسط والمقام في مرافق البسط فنتحصل على:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{7+x}-\sqrt{7-x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{7+x}-\sqrt{7-x}\right)\left(\sqrt{7+x}+\sqrt{7-x}\right)}{x\left(\sqrt{7+x}+\sqrt{7-x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2x}{x\left(\sqrt{7+x}+\sqrt{7-x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{7+x}+\sqrt{7-x}}=\frac{2}{2\sqrt{7}}=\frac{1}{\sqrt{7}}$$

حل التمرين 2:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x-2\sin x}{x^3+7}$

نلاحظ أن المقام يؤول إلى $+\infty$ ، وأن البسط يمكن إعطاء حصر له.

❖ لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $\begin{cases}-1\le\cos x\le1\\-1\le\sin x\le1\end{cases}$ ومنه فإن: $\begin{cases}-1\le\cos x\le1\\-2\le-2\sin x\le2\end{cases}$ ، ثم بجمع أطراف المتراجحتين نتحصل على: $-3\le\cos x-2\sin x\le3$.

❖ من أجل كل $x>0$ لدينا $x^3+7>0$ ، ومنه فإن: $\dfrac{-3}{x^3+7}\le\dfrac{\cos x-2\sin x}{x^3+7}\le\dfrac{3}{x^3+7}$.

❖ من جهة أخرى لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3}{x^3+7}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x^3+7}=0$ ، ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x-2\sin x}{x^3+7}=0$.

2) نلاحظ أن $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}}{\sin x}$ تؤول إلى حالة عدم تعيين $\dfrac{0}{0}$ ، ولإزالتها يجب ضرب البسط والمقام في مرافق البسط فنتحصل على:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}\right)\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}\right)}{\sin x\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1+2x)(1-2x)}{\sin x\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4x}{\sin x\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\times\frac{4}{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}}$$

وبما أن: $\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$ و $\lim_{x\to0}\frac{4}{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}}=2$ ، فإن: $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}}{\sin x}=2$.

حل التمرين 3:

لدينا: $h(x)=\frac{x^2-7x+6}{(x-6)^2}$

1) الدالة h معرفة من أجل $x-6\neq0$ أي: $x\neq6$ ومنه فإن: $D_h=\mathbb{R}-\{6\}$.

2) نلاحظ أن 1 و 6 هي حلول للمعادلة: $x^2-7x+6=0$ ، ومنه فإن: $x^2-7x+6=(x-1)(x-6)$.

3) من أجل كل x من D_h لدينا: $h(x)=\frac{(x-1)(x-6)}{(x-6)^2}=\frac{x-1}{x-6}$ ، $\lim_{x\to6}(x-1)=5$ و $\lim_{x\to6}(x-6)=0$.

وبما أن نهاية المقام معدومة فيمكن دراسة نهاية $h(x)$ عن يمين و عن يسار 6. ومنه لدينا:

❖ $\lim_{x\to6}(x-1)=5\ \&\ \lim_{x\xrightarrow{<}6}(x-6)=0^-\Leftrightarrow\lim_{x\xrightarrow{<}6}h(x)=-\infty$.

❖ $\lim_{x\to6}(x-1)=5\ \&\ \lim_{x\xrightarrow{>}6}(x-6)=0^+\Leftrightarrow\lim_{x\xrightarrow{>}6}h(x)=+\infty$.

حل التمرين 4:

لدينا f هي الدالة المعرفة بـ: $f(x)=\frac{-11}{(x-2)^2(x-7)}$

1) الدالة f معرفة من أجل $x-2\neq0$ و $x-7\neq0$ ومنه فإن: $\boxed{D_f=\mathbb{R}-\{2;7\}}$.

2) حساب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها:

❖ $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to-\infty}(x-2)^2=+\infty\\ \lim_{x\to-\infty}(x-7)=-\infty\end{array}\right\}\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}(x-2)^2(x-7)=-\infty\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)=0^+$.

❖ من أجل كل x من D_f لدينا: $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}\times\frac{-11}{x-7}$ ،

- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^2}=+\infty$ & $\lim\limits_{x\to 2}=\dfrac{-11}{x-7}=\dfrac{11}{5} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{-11}{(x-2)^2}=-\dfrac{11}{25}$ & $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 7}\dfrac{1}{x-7}=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 7} f(x)=+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{-11}{(x-2)^2}=-\dfrac{11}{25}$ & $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 7}\dfrac{1}{x-7}=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 7} f(x)=-\infty$.

❖ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(x-7)=+\infty\end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)^2(x-7)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0^-$.

حل التمرين 5:

لتكن f الدالة المعرفة بـ $f(x)=\dfrac{2x^3}{(x+5)^2}$

1) الدالة f معرفة من أجل $x+5\neq 0$ أي: $x\neq -5$ ومنه فإن $D_f=\mathbb{R}-\{-5\}$.

2) حساب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها

❖ نلاحظ أنه من أجل كل x من D_f لدينا: $\dfrac{2x^3}{x^2+10x+25}=\dfrac{2x^3}{(x+5)^2}=f(x)$ ومنه فإن:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3}{x^2+10x+25}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}2x=-\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3}{x^2+10x+25}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to-5}2x^3=-250$ & $\lim\limits_{x\to-5}(x+5)^2=0^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-5} f(x)=-\infty$.

حل التمرين 6:

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3+x^2+x+1=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+1}{x-x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2}{-x^2}=-3$.

❖ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{x^2-2x-2}=-\dfrac{1}{2}$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+\frac{1}{x}}{x^2-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^3}}=1$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ & $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x+\sqrt{x}=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x+1)(x-3)}{3x^3+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-2x-3}{3x^3+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{3x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{3x}=0$.

حل التمرين 7:

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}$.

نلاحظ أنه إذا افترضنا أن: $h(x)=4+\frac{1}{x^2}$، و $g(x)=\sqrt{x}$، فإن: $f(x)=g\circ h(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} 4+\frac{1}{x^2}=4 \ \& \ \lim_{X\to4}\sqrt{X}=2 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=2.$$

حل التمرين 8:

نعلم أن النهاية عند $\pm\infty$ لدالة كثيرة حدود هي نهاية الحد الأعلى درجة. ومنه فإن:

- $\lim_{x\to+\infty} x^2+2x=\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$.
- $\lim_{x\to+\infty} x^2-2x=\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$.
- $\lim_{x\to+\infty} x^3-x^2-5=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$.
- $\lim_{x\to-\infty} x^3-x^2-5=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$.
- $\lim_{x\to0} x^3-x^2-5=0-5=-5$.
- $\lim_{x\to+\infty} 2x^4+x^2-1=\lim_{x\to+\infty} 2x^4=+\infty$.
- $\lim_{x\to-\infty} 2x^4+x^2-1=\lim_{x\to-\infty} 2x^4=+\infty$.
- $\lim_{x\to+\infty} -2x^4+x^3+x=\lim_{x\to+\infty} -2x^4=-\infty$.
- $\lim_{x\to-\infty} -2x^4+x^3+x=\lim_{x\to-\infty} -2x^4=+\infty$.
- $\lim_{x\to+\infty} x^2-x=\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty \ \& \ \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} x^2-x-\frac{1}{x}=+\infty$.

حل التمرين 9:

نعلم أن النهاية عند $\pm\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة في البسط والمقام. وأن النهاية عند $\pm\infty$ لدالة كثيرة حدود هي نهاية الحد الأعلى درجة. ومنه فإن:

- $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$.
- $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$.
- $\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x+1}=\frac{0}{1}=0$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^3+3x^2-x-1}{x^3+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{x^3} = 2.$

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^3+3x^2-x-1}{x^3+x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{x^3} = 2.$

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3+2x^2+1 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty.$

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+x+1}{x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty.$

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3-x^2}{2x^2+x+5} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{2x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2-3x-4}{x^3-3x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0.$

❖ $\lim\limits_{x\to0} 2x^2-3x-4 = -4$ & $\lim\limits_{x\to0} x^3-3x+1 = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0} \frac{2x^2-3x-4}{x^3-3x+1} = -4.$

حل التمرين 10:

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+x}{3x^3-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{3x} = 0.$

❖ $\lim\limits_{x\to1} (x-1)^2 = 0^+$ & $\lim\limits_{x\to1} -3x+2 = -1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1} \frac{-3x+2}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to1} (-3x+2)\times\frac{1}{(x-1)^2} = -\infty.$

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{x^2+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)\times\frac{1}{x^2+2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2+2} = 0$ & $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)\times\frac{1}{x^2+2} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{x^2+2} = 0.$

❖ نعلم أن: $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} \frac{3-x}{2+x-x^2} = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} (3-x)\times\frac{1}{2+x-x^2}$.

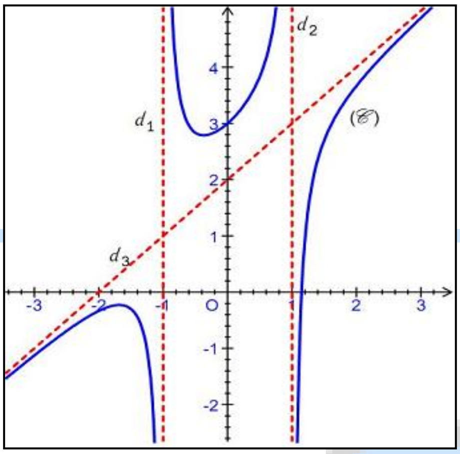
ونعلم أن: $\lim\limits_{x\to2} 2+x-x^2 = 0$ ، وأن جذري كثير الحدود: $2+x-x^2$ هما: 2 و(-1)،

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$-x^2+x+2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ومن خلال جدول الإشارة لدينا: $2+x-x^2>0$ عندما يكون: $x\in]-1;2[$ ، ومنه فإن:

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} \frac{1}{2+x-x^2} = +\infty$ & $\lim\limits_{x\to2} 3-x = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} (3-x)\times\frac{1}{2+x-x^2} = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} \frac{3-x}{2+x-x^2} = +\infty$.

حل التمرين 11:



❖ لدينا d_1 مستقيم مقارب لـ (C_f)، ومنه فإن: $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = +\infty$.

❖ لدينا d_2 مستقيم مقارب لـ (C_f)، ومنه فإن: $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = -\infty$.

❖ لدينا d_3 مستقيم مقارب لـ (C_f)، ومنه فإن: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (x+2) = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x+2) = 0$.

❖ المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم d_3 الذي معادلته: $y = x + 2$ عندما يكون $x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ ، ومنه فإن: $f(x) - (x+2) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

❖ المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم d_3 الذي معادلته: $y = x + 2$ عندما يكون $x \in]-1;1[$ ، ومنه فإن: $f(x) - (x+2) > 0 \Leftrightarrow x \in]-1;1[$.

حل التمرين 12:

f هي الدالة المعرفة بـ: $f(x) = \dfrac{-2x^2 + 7x}{3 - x}$.

1) الدالة f غير معرفة من أجل $3 - x = 0$ ، ومنه فإن مجموعة تعريفها هي:

$D_f = \mathbb{R} - \{3\} =]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$.

❖ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x^2 + 7x}{3 - x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x^2}{-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x = -\infty$.

❖ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2 + 7x}{3 - x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2}{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$.

❖ $\lim\limits_{x \to 3} -2x^2 + 7x = 3$ & $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3} 3 - x = 0^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3} \dfrac{-2x^2 + 7x}{3 - x} = +\infty$.

❖ $\lim\limits_{x \to 3} -2x^2 + 7x = 3$ & $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} 3 - x = 0^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} \dfrac{-2x^2 + 7x}{3 - x} = -\infty$.

2) من أجل كل $x \in D_f$ لدينا:

$$2x - 1 + \frac{3}{3 - x} = \frac{(2x-1)(3-x) + 3}{3 - x} = \frac{6x - 2x^2 - 3 + x + 3}{3 - x}$$
$$= \frac{-2x^2 + 7x}{3 - x} = f(x)$$

3) من خلال السؤالين السابقين لدينا:

❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} f(x) = -\infty$ ، ومنه فإن: (C_f) التمثيل البياني للدالة f يقبل المستقيم الذي معادلته: $x = 3$ مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب.

❖ $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{3}{3-x}$ أي $f(x) - 2x - 1 = \dfrac{3}{3-x}$ و $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{3-x} = 0$ ، ومنه فإن: (C_f) التمثيل البياني للدالة f يقبل المستقيم الذي معادلته: $y = 2x - 1$ مستقيما مقاربا مائلا عند $+\infty$ و $-\infty$.

حل التمرين 13:

1) $10 - 3x - x^2$ هو كثير حدود من الدرجة الثانية، مميزه هو: $\Delta = (-3)^2 - 4(-1)(10) = 49 = 7^2$ ،

وجذراه هما على التوالي: $x_1 = \dfrac{3-7}{-2} = \dfrac{-4}{-2} = 2$ و $x_2 = \dfrac{3+7}{-2} = \dfrac{10}{-2} = -5$.

يمكننا إعطاء إشارة $10 - 3x - x^2$ في الجدول التالي:

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
$10-3x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

لدينا إذن:

$$x \in]-\infty;-5[\cup]2;+\infty[\Leftrightarrow 10 - 3x - x^2 < 0$$

$$x \in]-5;2[\Leftrightarrow 10 - 3x - x^2 > 0$$

2) f هي الدالة المعرفة بـ: $f(x) = \dfrac{2x+1}{10-3x-x^2}$.

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+1}{10-3x-x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{-x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{2}{x} = 0$.

❖ $\lim\limits_{x\to-5} 2x+1 = -9$ & $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -5} 10 - 3x - x^2 = 0^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -5} \dfrac{2x+1}{10-3x-x^2} = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -5} f(x) = -\infty$

❖ $\lim\limits_{x\to 2} 2x+1 = 5$ & $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} 10 - 3x - x^2 = 0^- \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} \dfrac{2x+1}{10-3x-x^2} = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} f(x) = -\infty$.

3) بما أنه من أجل كل $x \neq -5$ و $x \neq 2$ لدينا: $g(x) \leq f(x)$ ،

$$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -5} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -5} g(x) = -\infty$$

$$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} g(x) = -\infty$$

لكن لا يمكن استنتاج أي شيء عن $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

حل التمرين 14:

❖ لدينا: $\lim_{x \xrightarrow{<} 2} x^2-5x+6=0$ و $\lim_{x \xrightarrow{<} 2} (2-x)^2=0$. ومنه فإن $\lim_{x \xrightarrow{<} 2} \frac{x^2-5x+6}{(2-x)^2}$ تؤول إلى حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$.

نلاحظ من جهة أخرى أن 2 هي جذر لـ x^2-5x+6، وأنه يمكن كتابة: $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$.

إذن من أجل $x \neq 2$، لدينا: $\frac{x-3}{x-2}=\frac{(x-2)(x-3)}{(2-x)^2}=\frac{x^2-5x+6}{(2-x)^2}$، ومنه فإن:

$$\lim_{x\to 2} x-3=-1 \ \& \ \lim_{x \xrightarrow{<} 2} x-2=0^- \Leftrightarrow \lim_{x \xrightarrow{<} 2} \frac{x-3}{x-2}=+\infty.$$

إذن: $\lim_{x \xrightarrow{<} 2} \frac{x^2-5x+6}{(2-x)^2}=+\infty$.

❖ لدينا: $\lim_{x\to+\infty} 3x=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} -\sqrt{2x^2+3}=-\infty$. ومنه فإن $\lim_{x\to+\infty} 3x-\sqrt{2x^2+3}$ تؤول إلى حالة عدم تعيين $+\infty-\infty$.

ولرفع هذه الحالة يمكن اختزال الحد ذو الدرجة العليا، فنكتب:

$$3x-\sqrt{2x^2+3}=3x-\sqrt{x^2\left(2+\frac{3}{x^2}\right)}=3x-|x|\left(2+\frac{3}{x^2}\right).$$

وبما أننا ندرس $\lim_{x\to+\infty} 3x-\sqrt{2x^2+3}$ فإن: $x>0$، ومنه فإن: $|x|=x$.

ومنه يصبح لدينا: $\lim_{x\to+\infty} 3x-\sqrt{2x^2+3}=\lim_{x\to+\infty} x\left(3-\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}\right)$.

لدينا: $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x^2}=0$، ومنه فإن: $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2+\frac{3}{x^2}}=\sqrt{2}$، ومنه فإن: $\lim_{x\to+\infty} 3-\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}=3-\sqrt{2}>0$. ولدينا من جهة أخرى: $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$، ومنه فإن: $\lim_{x\to+\infty} x\left(3-\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}\right)=+\infty$. إذن:

$\lim_{x\to+\infty} 3x-\sqrt{2x^2+3}=+\infty$.

❖ لدينا: $\lim_{x\to-\infty} 3x=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} -\sqrt{2x^2+3}=-\infty$. ومنه فإن $\lim_{x\to-\infty} 3x-\sqrt{2x^2+3}=-\infty$.

❖ لدينا: $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ $=\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+1}{x^2-2x-2}$. ومنه فإن: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+1}{x^2-2x-2}=+\infty$.

❖ نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $-1\leq \sin x\leq 1$. وبما أننا ندرس $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\frac{x}{2}}{x\sqrt{x}}$ فإن: $x>0$،

ومنه فإن: $x\sqrt{x}>0$. ومنه يصبح لدينا: $\frac{1}{x\sqrt{x}} \le \frac{\sin\frac{x}{2}}{x\sqrt{x}} \le \frac{-1}{x\sqrt{x}}$. ونحن نعلم أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{x}=+\infty$ ،

ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x\sqrt{x}}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}=0$.

وبتطبيق قانون الحصر يمكننا أن نستنتج أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x\sqrt{x}}=0$.

❖ لدينا: $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{3x+3}-3=0$ و $\lim\limits_{x\to 2} 2-x=0$ ومنه فإن $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x+3}-3}{2-x}$ تؤول إلى حالة عدم تعيين.

ولرفع هذه الحالة نضرب كلا من البسط والمقام في مرافق البسط، فنكتب:

$$\frac{\sqrt{3x+3}-3}{2-x}=\frac{\left(\sqrt{3x+3}-3\right)\left(\sqrt{3x+3}+3\right)}{(2-x)\left(\sqrt{3x+3}+3\right)}=\frac{3x+3-9}{(2-x)\left(\sqrt{3x+3}+3\right)}=\frac{3(x-2)}{(2-x)\left(\sqrt{3x+3}+3\right)}$$ ،

إذن باختزال: $x-2$ من البسط والمقام يصبح لدينا: $\frac{\sqrt{3x+3}-3}{2-x}=\frac{-3}{\sqrt{3x+3}+3}$.

ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{-3}{\sqrt{3x+3}+3}=\frac{-3}{6}=-\frac{1}{2}$. إذن: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x+3}-3}{2-x}=-\frac{1}{2}$.

حل التمرين 15:

❖ لدينا: $-1\le -\frac{1}{2}\le 1$ ، ومنه فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$. إذن: $\lim\limits_{n\to+\infty} 5\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$.

❖ لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{2}{\sqrt{x}}}{\frac{2}{x}+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\frac{2\sqrt{x}}{x}\right)}{x\left(\frac{2}{x}+3\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-2\sqrt{x}}{2+3x}$ ،

ولدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\frac{2}{\sqrt{x}}=1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x}+3=3$ ، ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-2\sqrt{x}}{2+3x}=\frac{1}{3}$.

❖ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، لدينا: $-1\le\cos x\le 1$ ، ومنه فإن: $1\le 2+\cos x\le 3$.

وبما أننا نبحث عن $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2+\cos x}{2+x}$ فإن: $2+x<0$ ، ومنه فإن: $\frac{1}{2+x}\le\frac{2+\cos x}{2+x}\le\frac{3}{2+x}$.

ونعلم أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{2+x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2+x}=0$ ، ومنه وبتطبيق قانون الحصر فإن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2+\cos x}{2+x}=0$.

❖ لدينا: $\sqrt{3x^2-2}+x=\sqrt{x^2\left(3-\frac{2}{x^2}\right)}+x=-x\sqrt{\left(3-\frac{2}{x^2}\right)}+x$ لأن: $x<0$ ، ومنه فإن:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3x^2-2}+x=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{3-\frac{2}{x^2}}+1\right)$. وبما أن: . ،

فإن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{3-\frac{2}{x^2}}+1\right)=1-\sqrt{3}<0$ ، ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{3-\frac{2}{x^2}}+1\right)=+\infty$.

إذن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3x^2-2}+x=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^4-x^2+1}{-3x^3-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^4}{-3x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{2}{3}x=+\infty$. إذن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^4-x^2+1}{-3x^3-x}=+\infty$.

❖ لدينا: $\lim\limits_{x\to-2}(x+2)^3=0$ ، و $\lim\limits_{x\to-2}x^2-3=1$ ، ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to-2}\frac{(x+2)^3}{x^2-3}=0$.

❖ لدينا: $\lim\limits_{x\to1}x^2+3x+1=5$ ، و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}1-x=0^-$ ، ومنه فإن: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}\frac{x^2+3x+1}{1-x}=-\infty$.

❖ لدينا: $\frac{2x-4}{\sqrt{x+7}-3}=\frac{(2x-4)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{\left(\sqrt{x+7}-3\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\frac{2(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{(x+7-9)}$ ،

أي: $\frac{2x-4}{\sqrt{x+7}-3}=\frac{2(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{(x-2)}=2\left(\sqrt{x+7}+3\right)$ ، ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to2}\frac{2x-4}{\sqrt{x+7}-3}=12$.

❖ لدينا: $\frac{-2x^2-x+6}{x^2-2x-8}=\frac{(x+2)(-2x+3)}{(x+2)(x-4)}=\frac{-2x+3}{x-4}$ ،

أي: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-2}\frac{-2x^2-x+6}{x^2-2x-8}=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-2}\frac{-2x+3}{x-4}=-\frac{7}{6}$ ، ومنه فإن: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-2}\frac{-2x^2-x+6}{x^2-2x-8}=-\frac{7}{6}$.

❖ لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$ ، و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{-1+5x^3}=+\infty$ ، ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}2x+\sqrt{-1+5x^3}=+\infty$.

حل التمرين 16:

❖ لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^4-x^2+3}{2-x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^4}{-x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}-3x^2=-\infty$ ، ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^4-x^2+3}{2-x^2}=-\infty$.

❖ لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ ، و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{-2+3x^3}=+\infty$ ، ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}x+\sqrt{-2+3x^3}=+\infty$.

❖ لدينا: $\lim\limits_{x\to-1}(1+x)^3=0$ ، و $\lim\limits_{x\to-1}x^2-2=-1$ ، ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to-1}\frac{(1+x)^3}{x^2-2}=0$.

❖ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، لدينا: $-1\le\sin x\le1$ ، ومنه فإن: $0\le\sin x+1\le2$.

وبما أننا نبحث عن $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sin x+1}{1+x}$ فإن: $1+x<0$ ، ومنه فإن: $\frac{2}{1+x}\le\frac{\sin x+1}{1+x}\le\frac{0}{1+x}$.

ونعلم أن: $\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{1+x}=0$ ، و $\lim_{x\to-\infty}\frac{0}{1+x}=0$ ، ومنه وبتطبيق قانون الحصر فإن: $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x+1}{1+x}=0$.

❖ لدينا: $\lim_{x\xrightarrow{>}-2} x^2+3=4+3=7$ ، و $\lim_{x\xrightarrow{>}-2} 2-x=0^-$ ، ومنه فإن: $\lim_{x\xrightarrow{>}-2}\frac{x^2+3}{2-x}=-\infty$.

❖ لدينا: $\frac{x^2+x-6}{-3x^2-7x+6}=\frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(-3x+2)}=\frac{x-2}{-3x+2}$ ،

أي: $\lim_{x\xrightarrow{>}-3}\frac{x^2+x-6}{-3x^2-7x+6}=\lim_{x\xrightarrow{>}-3}\frac{x-2}{-3x+2}=-\frac{5}{11}$ ، ومنه فإن: $\lim_{x\xrightarrow{>}-3}\frac{x^2+x-6}{-3x^2-7x+6}=-\frac{5}{11}$.

❖ لدينا: $-1\le-\frac{1}{3}\le1$ ، ومنه فإن: $\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=0$. إذن: $\lim_{n\to+\infty}2\left(-\frac{1}{3}\right)^n=0$.

❖ لدينا: $\frac{2x-6}{\sqrt{x+1}-2}=\frac{(2x-6)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\frac{2(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)}=2\left(\sqrt{x+1}+2\right)$ ،

أي: $\lim_{x\to3}\frac{2x-6}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to3}2\left(\sqrt{x+1}+2\right)=8$ ، ومنه فإن: $\lim_{x\to3}\frac{2x-6}{\sqrt{x+1}-2}=8$.

❖ لدينا: $\frac{\sqrt{x}-3x}{2x-4}=\frac{x\left(\frac{\sqrt{x}}{x}-3\right)}{x\left(2-\frac{4}{x}\right)}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-3}{2-\frac{4}{x}}$ ، ونعلم أن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}-3=-3$ ، و $\lim_{x\to+\infty}2-\frac{4}{x}=2$ ،

أي: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-3}{2-\frac{4}{x}}=-\frac{3}{2}$ ، ومنه فإن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-3x}{2x-4}=-\frac{3}{2}$.

❖ لدينا: $\sqrt{2x^2-3}+x=\sqrt{x^2\left(2-\frac{3}{x^2}\right)}+x=-x\sqrt{\left(2-\frac{3}{x^2}\right)}+x$ لأن: $x<0$ ، ومنه فإن:

$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2-3}+x=\lim_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}+1\right)$. وبما أن: $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}=\sqrt{2}$ ،

فإن: $\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}+1\right)=1-\sqrt{2}<0$ ، ومنه فإن: $\lim_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}+1\right)=+\infty$.

إذن: $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2-3}+x=+\infty$.

تمّ بحمد الله وتوفيقه