طرق عملية لحل تمارين الاستمرارية

1. دراسة استمرارية دالة عند عدد حقيقي:

لدراسة استمرارية الدالة f عند العدد الحقيقي a يجب أن:
- ❖ نحسب أولا $\lim_{x\to a} f(x)$ و $f(a)$، ثم نقارنهما.
  - إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$، فإن الدالة f مستمرة عند a.
  - إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$، فإن الدالة f ليست مستمرة عند a.

مثال: لتكن الدالة f المعرفة على $[3;+\infty[$ بـ: $\begin{cases} f(3)=0 \\ \forall x>3;\ f(x)=\sqrt{x-3} \end{cases}$.

أدرس استمرارية الدالة f عند 3.

الحل:

❖ لدينا: $f(3)=0$ و $\forall x>3;\ f(x)=\sqrt{x-3}$، ومنه فإن $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}\sqrt{x-3}=0$.

❖ وبما أن: $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$، فإن الدالة f مستمرة عند 3.

2. دراسة استمرارية دالة على مجال معين:

لدراسة استمرارية دالة على المجال I، خاصة إذا كانت عبارتها مختلفة باختلاف قيم x، يجب أن:
- ❖ نثبت استمرارية الدالة باستعمال ما مر علينا في الدرس.
- ❖ نثبت استمرارية الدالة عند النقاط التي تكون فيها الدالة معرفة بصفة خاصة.

مثال: لتكن الدالة f المعرفة على $[2;+\infty[$ بـ: $\begin{cases} f(2)=4 \\ \forall x>2;\ f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2} \end{cases}$.

أدرس استمرارية الدالة f على $[2;+\infty[$.

الحل:

❖ الدالة $x \to x^2-4$ مستمرة على $]2;+\infty[$ لأنها ثلاثي حدود. والدالة $x \to x-2$ مستمرة على $]2;+\infty[$ لأنها دالة تآلفية ولا تنعدم في المجال $]2;+\infty[$. ومنه فإن الدالة f مستمرة على $]2;+\infty[$. (1)

❖ لدينا: $\forall x>2;\ f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$، ومنه فإن:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

❖ وبما أن: $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)=4$ ، فإن الدالة f مستمرة عند 2. (2)

❖ من (1) و(2) نستنتج أن الدالة f مستمرة على $[2;+\infty[$.

3. تعيين عدد حلول معادلة من الشكل $f(x)=k$:

لتعيين عدد حلول معادلة من الشكل $f(x)=k$ على المجال I ، نستعمل مبرهنة القيم المتوسطة من أجل كل مجال من I تكون فيه الدالة f رتيبة تماما. ولأجل ذلك يجب أن:

❖ إجراء التعديلات اللازمة للحصول على معادلة من الشكل $f(x)=k$.

❖ ندرس تغيرات الدالة f ، ونشكل جدول تغيراتها على I.

❖ نحدد المجالات I_i من I التي تكون من أجلها الدالة f رتيبة تماما. ومن أجل كل مجال I_i ، نقوم بما يلي:

- نثبت أن الدالة f مستمرة.
- نثبت أن الدالة f رتيبة تماما.
- نحدد النهايات أو قيم x عند حدود I_i. وليكن J_i صورة I_i بالدالة f . نحدد إن كان $k\in J_i$.
- إن كان $k\notin J_i$ ، فإن المعادلة $f(x)=k$ ليس لها حلول على I_i .
- إن كان $k\in J_i$ ، فإنه بتطبيق مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا على I_i.

نكرر المراحل السابقة لكل مجال من المجالات I_i.

❖ نستنتج في الأخير عدد حلول المعادلة $f(x)=k$ على I.

ملاحظة: من خلال جدول تغيرات الدالة f ، وباتباع الأسهم، يمكن تحديد عدد حلول المعادلة $f(x)=k$.

ومن ثمّ يتبقى لنا تحديد قيم هذه الحلول.

مثال: أوجد عدد حلول المعادلة $x^3+x^2-x+1=0$ على $\mathbb{R}$.

الحل:

❖ نضع: $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=x^3+x^2-x+1$ ، ثم ندرس عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ على $\mathbb{R}$.

❖ الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثير حدود، ولدينا: $\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=3x^2+2x-1$.

- f' ثلاثي حدود مميزه: $\Delta=16>0$ ومنه فإن $x_1=-1\ ;\ x_2=\frac{1}{3}$.
- من هنا فإن جدول إشارة f' يكون كالتالي:

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

❖ من جهة أخرى لدينا:

- $\lim_{x\to-\infty}(x^3+x^2-x+1)=\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty$
- $\lim_{x\to+\infty}(x^3+x^2-x+1)=\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$
- $f(-1)=(-1)^3+(-1)^2-(-1)+1=2$

- $f\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)+1=\frac{22}{27}$

● من هنا فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	2	↘	$\frac{22}{27}$	↗	$+\infty$

❖ نلاحظ من خلال جدول تغيرات الدالة f أنها رتيبة تماما على $]-\infty;-1[$ ، $\left[-1;\frac{1}{3}\right]$ و $\left[\frac{1}{3};+\infty\right[$.

● على $]-\infty;-1[$: الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما، كما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $f(-1)=2$ ، وبما أن $0\in]-\infty;2]$ ، فبتطبيق مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا على $]-\infty;-1[$.

● على $\left[-1;\frac{1}{3}\right]$: الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما، كما أن $f(-1)=2$ و $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{22}{27}$ ، وبما أن $0\notin\left[2;\frac{22}{27}\right]$ ، فبتطبيق مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x)=0$ لا تقبل حلول على $\left[-1;\frac{1}{3}\right]$.

● على $\left[\frac{1}{3};+\infty\right[$: الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما، كما أن $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{22}{27}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، وبما أن $0\notin\left[\frac{22}{27};+\infty\right[$ ، فبتطبيق مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x)=0$ لا تقبل حلول على $\left[\frac{1}{3};+\infty\right[$.

❖ مما سبق نستنتج أن المعادلة $x^3+x^2-x+1=0$ تقبل حلا وحيدا على $\mathbb{R}$.

4. إثبات أن المعادلة من الشكل $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا:

لإثبات أن معادلة من الشكل $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا على مجال معين I ، يجب:

❖ إجراء التعديلات اللازمة للحصول على معادلة من الشكل $f(x)=k$.

❖ دراسة تغيرات الدالة f ، وتشكيل جدول تغيراتها على I .

❖ إثبات أن الدالة f مستمرة على I .

❖ إثبات أن الدالة f رتيبة تماما على I .

❖ تحديد النهايات أو قيم x عند حدود I . ولتكن J صورة I بالدالة f . نحدد إن كان $k\in J$:

● إن كان $k\notin J$ ، فإن المعادلة $f(x)=k$ ليس لها حلول على I .

● إن كان $k\in J$ ، فإنه بتطبيق مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا على I .

مثال: أثبت أن المعادلة $x^3-2x+1=0$ تقبل حلا وحيدا على $]-\infty;-1]$.

الحل:

❖ نضع: $\forall x\in]-\infty;-1];\ f(x)=x^3-2x+1$ ، ثم ندرس عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ على $]-\infty;-1]$.

❖ الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-\infty;-1]$ لأنها دالة كثير حدود، ولدينا:

$$\forall x \in]-\infty;-1];\ f'(x) = 3x^2 - 2$$

- $3x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}\ ;\ x_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$.

وبما أن $-1 < -\sqrt{\frac{2}{3}}$ فإن $f' > 0$ على المجال $]-\infty;-1]$، ومنه فإن الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty;-1]$.

من جهة أخرى لدينا:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3 - 2x + 1\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.
- $f(-1) = (-1)^3 - 2(-1) + 1 = 2$

ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$		-1
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	2

❖ على $]-\infty;-1]$، الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما، كما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $f(-1) = 2$، وبما أن $0 \in]-\infty;2]$، فبتطبيق مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا على $]-\infty;-1]$.

5. إيجاد حصر لحل معادلة من الشكل $f(x) = k$ باستعمال حاسبة أو جهاز كمبيوتر:

لإيجاد حصر لـ α باستعمال حاسبة أو جهاز كمبيوتر، يجب أن:

❖ ندخل عبارة الدالة f على الحاسبة أو جهاز الكمبيوتر،

❖ نختار سعة الحصر فنتحصل على جدول بقيم $f(x)$.

❖ على الجدول، نحدد قيم a و b التي تكون من أجلها $f(a) < k < f(b)$.

❖ نستنتج عندها حصرا لـ α، حيث: $a < \alpha < b$.

مثال: f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2$. نعلم أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$. أوجد حصرا لـ α سعته 10^{-2}.

الحل:

❖ ندخل $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2$ على الحاسبة أو جهاز الكمبيوتر ونرسم (C_f) التمثيل البياني للدالة f.

بتكبير الشكل نلاحظ أن (C_f) يقطع محور الفواصل بين $x = -3{,}3$ و $x = -3{,}1$.

❖ نشكل جدولا بقيم x المحصورة بين $x = -3{,}3$ و $x = -3{,}1$ بسعة قيمتها $p = 0{,}1$.

❖ من خلال الجدول، نلاحظ أن $f(-3{,}2) = -0{,}048$ وأن: $f(-3{,}1) = 1{,}039$. نستنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا بين $x = -3{,}2$ و $x = -3{,}1$.

❖ نشكل جدولا بقيم x المحصورة بين $x = -3{,}20$ و $x = -3{,}10$ بسعة قيمتها $p = 0{,}01$.

❖ من خلال الجدول، نلاحظ أن $f(-3{,}20)=-0{,}048$ وأن: $f(-3{,}19)=0{,}066541$. نستنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا بين $x=-3{,}20$ و $x=-3{,}19$.

❖ نستنتج أن $-3{,}20<\alpha<-3{,}19$.

6. إيجاد حصر لحل المعادلة $f(x)=0$ بطريقة التنصيف:

لإيجاد حصر لـ α حل المعادلة $f(x)=0$ على المجال $[a;b]$ بطريقة التنصيف، يجب أن:

❖ نحدد m مركز المجال $[a;b]$ حيث: $m=\dfrac{a+b}{2}$. ثم نحسب $f(a)\times f(m)$ و $f(b)\times f(m)$.

❖ نواصل بنفس الطريقة من خلال تعويض a أو b بـ m وذلك لغاية الحصول على الحصر المرغوب فيه.

مثال: f دالة معرفة على $[0;2]$ بـ: $f(x)=x^3+2x-1$. نعلم أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $[0;2]$. أوجد حصرا لـ α سعته 10^{-1}.

الحل:

❖ ليكن m مركز المجال $[0;2]$، ومنه فإن $m=\dfrac{0+2}{2}=1$.

❖ $f(0)\times f(1)=\left(0^3+2\times 0-1\right)\times\left(1^3+2\times 1^2-1\right)=(-1)(2)=-2<0$.

ومنه فإن $0<\alpha<1$.

❖ ليكن m' مركز المجال $[0;1]$، ومنه فإن $m'=\dfrac{0+1}{2}=0{,}5$.

❖ $f(0)\times f(0{,}5)=(-1)\times\left((0{,}5)^3+2\times(0{,}5)^2-1\right)=(-1)(-0{,}375)=0{,}375>0$.

❖ $f(0{,}5)\times f(1)=(-0{,}375)(2)=-0{,}75<0$.

ومنه فإن $0{,}5<\alpha<1{,}0$.

تمّ بحمد الله وتوفيقه