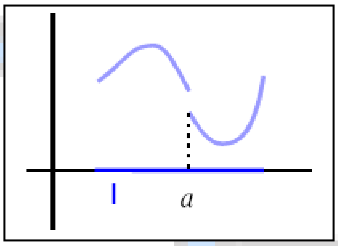
الاستمرارية

I. الاستمرارية عند القيمة x_0 :

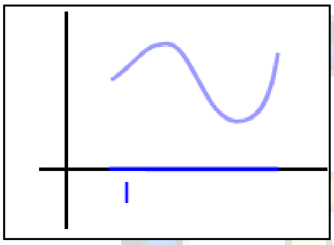
1) تعريف:

نقول عن الدالة f المعرفة على المجال I الذي يشمل x_0، أنها مستمرة عند القيمة x_0 إذا كانت: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

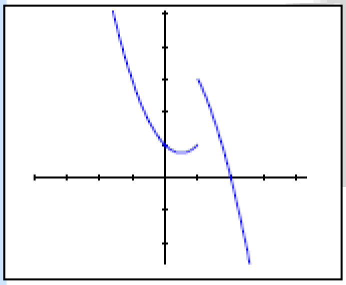
دالة غير مستمرة عند a من I



دالة مستمرة على المجال I

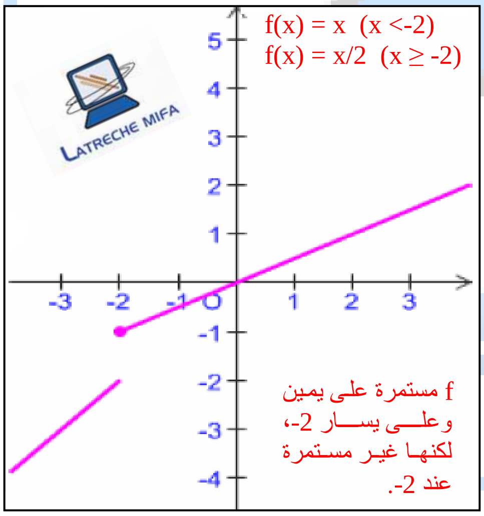


2) مثال:



❖ الدالة الممثلة في الشكل المقابل غير مستمرة على المجال $[-3;3]$ لأنها ليست لها نهاية عند 1 (لأن منحنى هذه الدالة عبارة عن خط متقطع، أي لا يمكننا رسمه دون رفع القلم عند 1)، لكنها مستمرة على المجالين $[-3;1[$ و $]1;3]$.

II. الاستمرارية عن يمين وعن يسار القيمة x_0 :



1) تعريف:

❖ تكون الدالة f المعرفة على المجال I الذي يشمل x_0 مستمرة على يمين x_0 إذا كانت: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} x_0} f(x) = f(x_0)$.

❖ تكون الدالة f المعرفة على المجال I الذي يشمل x_0 مستمرة على يسار x_0 إذا كانت: $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} x_0} f(x) = f(x_0)$.

2) مثال:

f دالة معرفة بـ: $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+x+4} & x \in [0;+\infty[\\ \dfrac{6}{x^2-x+3} & x \in]-\infty;0[\end{cases}$ ، أحسب استمرارية f عند $x_0 = 0$.

الحل:

❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \sqrt{x^2+x+4} = 2$ و $f(0)=2$، ومنه فإن f مستمرة على يمين 0.

❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \dfrac{6}{x^2-x+3} = 2$ و $f(0)=2$، ومنه فإن f مستمرة على يسار 0.

III. الاستمرارية على مجال معين:

1) تعريف:

نقول عن الدالة f المعرفة على المجال I أنها مستمرة على هذا المجال إذا كانت مستمرة عند كل قيمة من I.

2) نتيجة:

❖ مجموع وجداء ومركب دوال مستمرة هي أيضا دوال مستمرة.

❖ الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

❖ الدوال كثيرة حدود، sin، cos مستمرة على $\mathbb{R}$.

❖ الدوال الناطقة مستمرة على كل مجال محتوى في مجموعة تعريفها.

3) أمثلة:

❖ الدالة $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+2}{x+1}}$ معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ وهي دالة مركبة من الدالة $g(x)=\dfrac{x^2+2}{x+1}$ والدالة جذر تربيعي، وبما أن الدالة g معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ والدالة جذر تربيعي معرفة ومستمرة على المجال $[0;+\infty[$، ومنه فإن الدالة f مستمرة على المجال $]-1;+\infty[$.

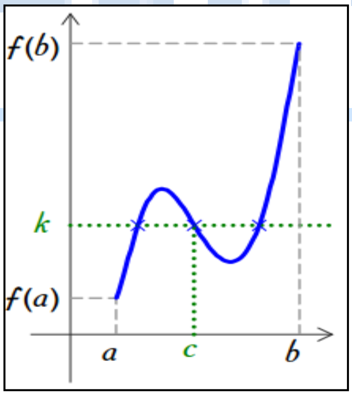
❖ الدالة $f(x)=x^2+2x+3$ هي دالة كثيرة حدود معرفة على $\mathbb{R}$، ومنه فإنها مستمرة على هذا المجال.

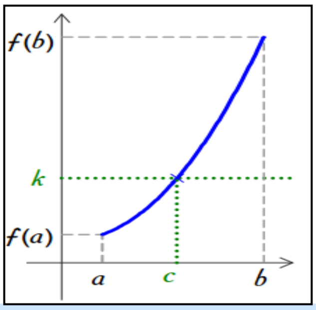
❖ الدالة $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x+1}$ هي دالة ناطقة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$، ومنه فإنها مستمرة على هذا المجال.

IV. نظرية القيم المتوسطة:

1) تعريف 1:

f دالة معرفة ومستمرة على المجال $[a;b]$. من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين f(a) وf(b)، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a وb حيث: $f(c)=k$.

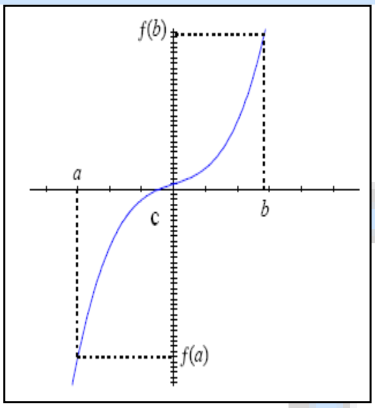




2)تعريف 2:

إذا كانت f دالة مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[a;b]$،
فإن المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a;b]$.

3)حالة خاصة:



إذا كان $f(a) \times f(b) < 0$ (أي $f(a)$ و$f(b)$ من إشارتين مختلفتين)، فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a وb حيث: $f(c) = 0$ (أي أن f تنعدم على الأقل مرة واحدة على المجال $[a;b]$).

التفسير الهندسي:

المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة c والترتيب 0).

4)حل المعادلة $f(x) = k$:

لإثبات وجود حلول للمعادلة $f(x) = k$ على المجال $[a;b]$ باستعمال مبرهنة القيم المطلقة نتبع الخطوات التالية:

- ❖ نكتب المعادلة على الشكل $f(x) = k$.
- ❖ نتحقق من استمرارية الدالة f على المجال $[a;b]$.
- ❖ نتحقق من أن k محصور بين $f(a)$ و$f(b)$.
- ❖ لمعرفة عدد حلول المعادلة $f(x) = k$، يتم تمثيل الدالة f بيانيا والمستقيم ذو المعادلة $y = k$، ثم ملاحظة نقاط تقاطعهما، حلول هذه المعادلة هي فواصل هذه النقاط.

ملاحظة:

مبرهنة القيم المتوسطة تؤكد فقط وجود حل على الأقل للمعادلة $f(x) = k$. أما تعيين الحلول أو قيم مقربة لها فيتم باتباع طرق مختلفة (الحصر بالتنصيف أو استعمال مجدول).

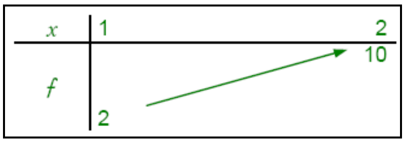
5)مثال:

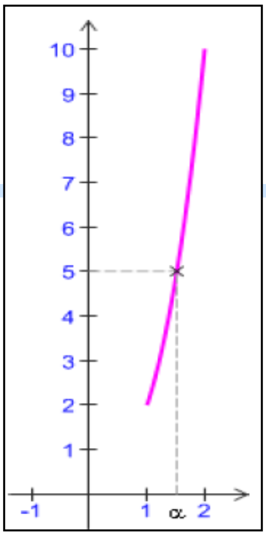
لدينا الدالة f المعرفة على المجال $[1;2]$ بـ $f(x) = x^3 + x$. ما هي حلول المعادلة $f(x) = 5$.

الحل:

❖ الدالة f هي دالة كثيرة حدود، وبالتالي فهي مستمرة على $\mathbb{R}$، ومنه فهي مستمرة على $[1;2]$، ومنه فإن المعادلة $f(x) = 5$ لها على الأقل حل على المجال $[1;2]$.

❖ نستطيع البرهنة أن f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[1;2]$، وجدول تغيراتها يكون كالتالي:





❖ إذن من أجل كل $k \in [2;10]$، المعادلة $f(x) = k$ لها حل وحيد في المجال $[1;2]$. وبشكل خاص: المعادلة $f(x) = 5$ لها حل وحيد α في المجال $[1;2]$.

❖ نستطيع إيجاد قيمة مقربة لـ α بإنشاء جدول قيم لـ $f(x)$ باستعمال آلة حاسبة فنتحصل على الجدول التالي:

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
$f(x)$	2	2,431	2,928	3,497	4,144	4,875	5,696

❖ لدينا $f(1,5) < 5 < f(1,6)$ ومنه نستنتج أن: $1,5 < \alpha < 1,6$.

V. استمرارية دالة وجدول تغيراتها:

1) تعريف:

اتفق الرياضيون على أنه في جدول تغيرات أي دالة، الأسهم المائلة تدل على أن الدالة مستمرة ورتيبة تماما على ذلك المجال.

2) مثال:

جدول تغيرات الدالة مربع $(f(x) = x^2)$ يدل على أنها مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$، ومستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.