حلول التمارين حول الاستمرارية -الجزء 1-

فهرس حلول التمارين

حل التمرين 1:

1) الدالة f معرفة بـ: $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x\leq 2 \\ 5-x & x>2 \end{cases}$.

❖ على المجال $]-\infty;2[$ الدالة f مستمرة لأنها معرفة بدالة كثيرة حدود. (1)

❖ على المجال $]2;+\infty[$ الدالة f مستمرة لأنها معرفة بدالة تآلفية. (2)

❖ لدراسة استمرارية الدالة f عند 2، نحسب:

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} x^2-1=3$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} 5-x=3$.

وبما أن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} f(x)=f(2)$ فإن: الدالة f مستمرة عند 2. (3)

من (1)، (2) و(3) نستنتج أن $\boxed{\text{الدالة } f \text{ مستمرة على } \mathbb{R}}$.

2) الدالة g معرفة بـ: $g(x)=\begin{cases} -2x-3 & x\leq -1 \\ x & -1\leq x\leq 1 \\ -3x & x>1 \end{cases}$.

❖ على المجال $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$ الدالة g مستمرة لأنها معرفة بدوال تآلفية. (4)

❖ لدراسة استمرارية الدالة g عند -1، نحسب:

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1} g(x)=\lim\limits_{x\to -1} -2x-3=-1$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} g(x)=\lim\limits_{x\to -1} x=-1$.

وبما أن $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1} g(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1} g(x)=g(-1)$ فإن: الدالة g مستمرة عند -1. (5)

❖ لدراسة استمرارية الدالة g عند 1، نحسب:

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1} x=1$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1} -3x=-3$.

وبما أن $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} g(x)\neq\lim\limits_{x\xrightarrow{}1} g(x)$ فإن: الدالة g ليست مستمرة عند 1. (6)

من (4)، (5) و(6) نستنتج أن $\boxed{\text{الدالة } g \text{ مستمرة على } \mathbb{R}-\{1\}}$.

حل التمرين 2:

1) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x\leq 0 \\ x-1 & x>0 \end{cases}$.

❖ على المجال $]-\infty;0[$ الدالة f مستمرة لأنها معرفة بدالة كثيرة حدود. (1)

❖ على المجال $]0;+\infty[$ الدالة f مستمرة لأنها معرفة بدالة تآلفية. (2)

❖ لدراسة استمرارية الدالة f عند 0، نحسب:

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x^2-1=-1$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x-1=-1$.

وبما أن $f(0)=\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)$ فإن: الدالة f مستمرة عند 0. (3)

من (1)، (2) و(3) نستنتج أن $\boxed{\text{الدالة } f \text{ مستمرة على } \mathbb{R}}$.

2) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} & x\neq 2 \\ 3 & x=2 \end{cases}$.

❖ على المجال $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ الدالة f مستمرة لأنها معرفة بدالة ناطقة مقامها غير معدوم. (1)

❖ من أجل كل $x\neq 2$، لدينا: $\dfrac{x^2-x-2}{x-2}=\dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2}=x+1$، ومنه فإن:

$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2} x+1=3=f(2)$ ومنه فإن: الدالة f مستمرة عند 2. (2)

من (1)، و(2) نستنتج أن $\boxed{\text{الدالة } f \text{ مستمرة على } \mathbb{R}}$.

حل التمرين 3:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3+3x$.

❖ الدالة f كثيرة حدود ومنه فإن: f مستمرة على $\mathbb{R}$. (1)

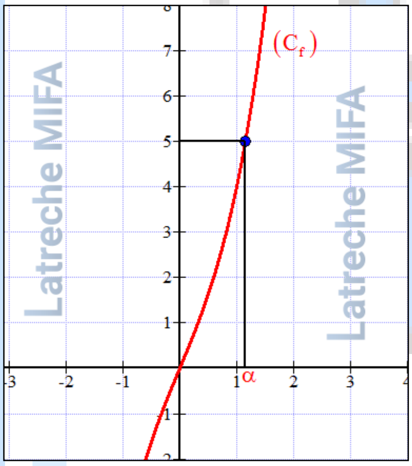
❖ من جهة أخرى الدالة f هي مجموع دالتين متزايدتان تماما ($x\to x^3$ و $x\to 3x$)، ومنه فإن: الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

(2)

❖ من (1) و(2) نستنتج أنه من أجل كل $k\in\mathbb{R}$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$.

❖ بأخذ $k=5$، المعادلة $x^3+3x=5$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.

الشكل المقابل يبين أن المعادلة $x^3+3x=5$ تقبل حلا وحيدا α.



x	f(x)
1,0	4
1,1	4,631
1,2	5,328
1,3	6,097

x	f(x)
1,14	4,9015
1,15	4,9709
1,16	5,0409

❖ لدينا: $f(1)=4$ و $f(2)=14$. وبما أن $4<5<14$ فإن:

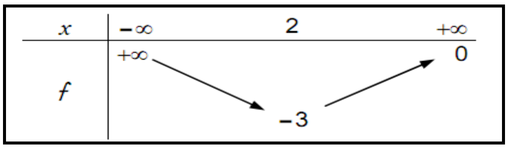
$f(1)<f(\alpha)<f(2)$.

❖ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$، فإن: $1<\alpha<2$.

❖ بأخذ قيم لـ x محصورة في المجال $[1;2]$، نتحصل على: $1,1<\alpha<1,2$.

❖ بأخذ قيم لـ x محصورة في المجال $[1,1;1,2]$، نتحصل على: $\boxed{\alpha\approx 1,15}$.

حل التمرين 4:



من خلال جدول تغيرات الدالة f نستطيع القول أن:

❖ الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;2[$.

● ومن أجل كل $x \in]-\infty;2[$ لدينا $f(x) \in]-3;+\infty[$.

● وبما أن $1 \in]-3;+\infty[$ فإن المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-\infty;2[$. (1)

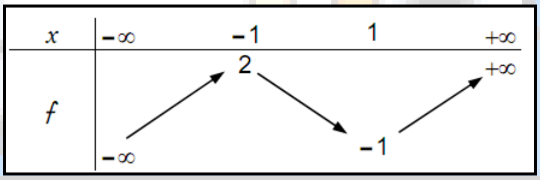
❖ الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]2;+\infty[$

● ومن أجل كل $x \in]2;+\infty[$ لدينا $f(x) \in]-3;0[$.

● وبما أن $1 \notin]-3;0[$ فإن المعادلة $f(x)=1$ ليس لها حل على المجال $]2;+\infty[$. (2)

❖ من (1) و(2) نستنتج أن $\boxed{\text{المعادلة } f(x)=1 \text{ تقبل حلا وحيدا } \alpha \text{ على } \mathbb{R}}$.

حل التمرين 5:



1) عدد حلول المعادلة $f(x)=0$:

من خلال جدول تغيرات الدالة f نستطيع القول أن:

❖ الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1[$

● ومن أجل كل $x \in]-\infty;-1[$ لدينا $f(x) \in]-\infty;2[$.

● وبما أن $0 \in]-\infty;2[$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-\infty;-1[$. (1)

❖ الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-1;1[$

● ومن أجل كل $x \in]-1;1[$ لدينا $f(x) \in]-1;2[$.

● وبما أن $0 \in]-1;2[$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β على المجال $]-1;1[$. (2)

❖ الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$

● ومن أجل كل $x \in]1;+\infty[$ لدينا $f(x) \in]-1;+\infty[$.

● وبما أن $0 \in]-1;+\infty[$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا γ على المجال $]1;+\infty[$. (3)

من (1)، (2) و(3) نستنتج أن $\boxed{\text{المعادلة } f(x)=0 \text{ تقبل 3 حلول في } \mathbb{R}}$.

2) عدد حلول المعادلة $f(x)=-5$:

من خلال جدول تغيرات الدالة f نستطيع القول أن:

❖ الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1[$

● ومن أجل كل $x\in]-\infty;-1[$ لدينا $f(x)\in]-\infty;2[$.

● وبما أن $(-5)\in]-\infty;2[$ فإن المعادلة $f(x)=-5$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-\infty;-1[$. (1)

❖ ومن أجل كل $x\in[-1;1]$ لدينا $f(x)\in[-1;2]$ ومنه فإن: $f(x)\neq -5$. (2)

❖ ومن أجل كل $x\in]1;+\infty[$ لدينا $f(x)\in]-1;+\infty[$ ومنه فإن: $f(x)\neq -5$. (3)

من (1)، (2) و(3) نستنتج أن المعادلة $f(x)=-5$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.

حل التمرين 6:

1) لدينا المعادلة: $(E):\cos x=\frac{2}{3}x$.

❖ نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $-1\le\cos x\le 1$. إذا كانت x حلا للمعادلة (E) فإن: $-1\le\frac{2}{3}x\le 1$ أي $-\frac{2}{3}\le x\le\frac{2}{3}$.

❖ نعلم أن $\frac{\pi}{2}\approx 1,57$، نستنتج أن $-\frac{\pi}{2}\le-\frac{2}{3}\le x\le\frac{2}{3}\le\frac{\pi}{2}$. (1)

❖ ونعلم أنه عندما يكون $-\frac{\pi}{2}\le x<0$، يكون $\cos x\ge 0$ و $\frac{2}{3}x<0$، أي $\cos x\neq\frac{2}{3}x$. (2)

❖ من (1) و(2) نستنتج أنه إذا كانت x حلا للمعادلة (E) فإن: $0\le x\le\frac{\pi}{2}$.

2) لتكن الدالة f المعرفة على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ بـ: $f(x)=\cos x-\frac{2}{3}x$.

❖ الدالة f هي مجموع دالتين $(x\to\cos x$ و $x\to-\frac{3}{2}x)$ مستمرتين ومتناقصتين تماما على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. ومنه فإن: الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

❖ لدينا: $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{2}=0-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$ و $f(0)=\cos 0-\frac{2}{3}\times 0=1$.

❖ من أجل كل $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ لدينا: $f(x)\in\left[-\frac{\pi}{3};1\right]$، وبما أن $0\in\left[-\frac{\pi}{3};1\right]$، فإن: المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \cos x-\frac{2}{3}x=0 \Leftrightarrow \cos x=\frac{2}{3}x \Leftrightarrow (E)$$

❖ومنه فإن: المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا في المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

❖من خلال السؤال 1، نعلم أن المعادلة (E) ليس لها حلول خارج المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$،

ومنه فإن: $\boxed{(E) \text{ تقبل حلا وحيدا في } \mathbb{R}}$.

3)لدينا: $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$ و $f(0)=1$ وبما أن $-\frac{\pi}{3}<0<1$ فإن: $f\left(\frac{\pi}{2}\right)<f(\alpha)<f(0)$.

❖ وبما أن الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$، فإن: $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

❖ بأخذ قيم لـ x محصورة في $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$، نتحصل على: $0,9<\alpha<1$.

❖بأخذ قيم لـ x محصورة في $[0,9\ ;\ 1]$، نتحصل على: $\boxed{\alpha \approx 0,91}$.

x	f(x)
0,8	0,1634
0,9	0,0216
1,0	-0,1264

x	f(x)
0,90	0,0216
0,91	0,0071
0,92	-0,0075

حل التمرين 7:

(C) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2-x^2$،

و(C') التمثيل البياني للدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\sqrt{3x}$.

❖أي نقطة تقاطع بين (C) و (C') يجب أن تكون لها فاصلة موجبة لأن الدالة g معرفة على $[0;+\infty[$. هذه الفاصلة ستكون حتما حلا للمعادلة $f(x)=g(x)$ أي $g(x)-f(x)=0$.

❖لنكن الدالة h المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $h(x)=g(x)-f(x)=\sqrt{3x}-(2-x^2)=\sqrt{3x}+x^2-2$.

- الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $[0;+\infty[$ لأنها مركبة من دالتين مستمرتين ومتزايدتين تماما على $[0;+\infty[$ (الدالة التآلفية $x \to 3x$ متبوعة بالدالة "جذر مربع"). (1)
- الدالة $-f$ المعرفة بـ: $x \to x^2-2$ هي دالة كثيرة حدود ومنه فإنها مستمرة ومتزايدة تماما على $[0;+\infty[$. (2)
- من (1) و(2) نستنتج أن الدالة h مستمرة ومتزايدة تماما على $[0;+\infty[$.
- لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-2=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$. ولدينا: $h(0)=-2$.

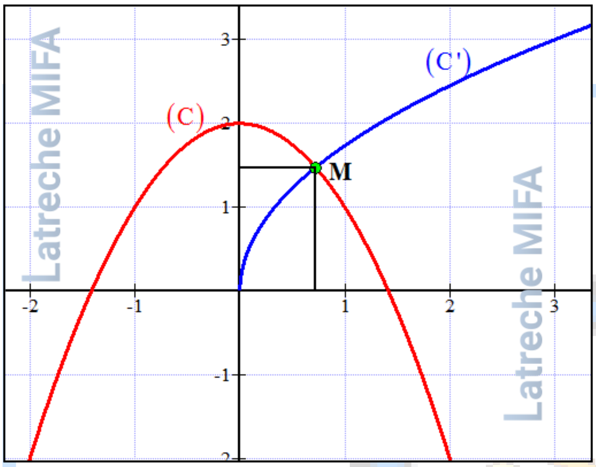
ومنه فإن: جدول تغيرات الدالة h يكون كالتالي:

x	0	$+\infty$
h	-2 ↗	$+\infty$

من خلال جدول تغيرات الدالة h، نستطيع القول أن:

❖ الدالة h مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

• ومن أجل كل $x \in [0;+\infty[$ لدينا $h(x) \in [-2;+\infty[$. وبما أن $0 \in [-2;+\infty[$ فإن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا على المجال $[0;+\infty[$.



❖ نستنتج من ذلك أن المعادلة $f(x)=g(x)$ تقبل حلا وحيدا في $[0;+\infty[$.

❖ ومنه فإن: (C) و (C') لهما نقطة تقاطع وحيدة M.

الشكل المقابل يبين صحة النتائج المتحصل عليها.

حل التمرين 8:

الدالة f معرفة على $[-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=2x-3+\sqrt{x+1}$.

(1

❖ الدالة $x \to 2x-3$ مستمرة ومتزايدة تماما على $[-1;+\infty[$. (1)

❖ الدالة $x \to \sqrt{x+1}$ مستمرة ومتزايدة تماما على $[-1;+\infty[$ لأنها مركبة من دالتين مستمرتين ومتزايدتين تماما على $[-1;+\infty[$ (الدالة التآلفية $x \to x+1$ والدالة "جذر مربع"). (2)

❖ من (1) و(2) نستنتج الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $[-1;+\infty[$.

❖ ولدينا: $f(-1)=-2-3+0=-5$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-3=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}=+\infty$

ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

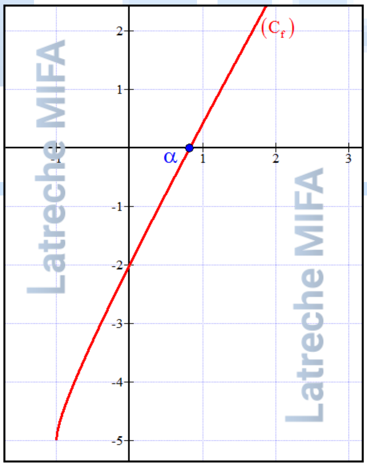
x	-1		$+\infty$
f	-5	↗	$+\infty$

2) من خلال جدول تغيرات الدالة f نستطيع القول أن:

❖ الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[-1;+\infty[$.

• ومن أجل كل $x \in [-1;+\infty[$ لدينا $f(x) \in [-5;+\infty[$.

• وبما أن $0 \in [-5;+\infty[$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[-1;+\infty[$.



الشكل المقابل يبين صحة النتائج المتحصل عليها.

3)لدينا: $f(0)=-2<0$ و $f(1)=2-3+\sqrt{2}=-1+\sqrt{2}>0$

ومنه فإن: $f(0)<f(\alpha)<f(1)$.

❖ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$، فإن: $0<\alpha<1$.

x	f(x)
0,8	-0,0584
0,9	0,1784
1,0	0,4142

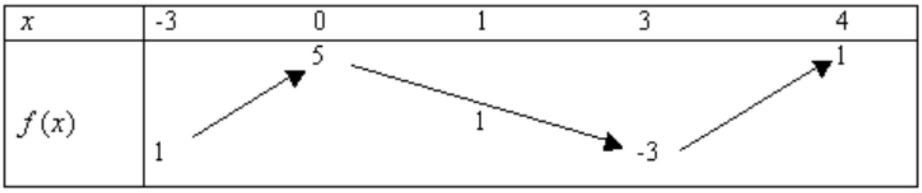
❖ بأخذ قيم لـ x محصورة في $[0;1]$، نتحصل على: $0,8<\alpha<0.9$.

x	f(x)
0,81	-0,0346
0,82	-0,0109
0,83	0,0128

❖بأخذ قيم لـ x محصورة في $[0,8\ ;\ 0,9]$، نتحصل على: $\boxed{\alpha\approx 0,82}$.

حل التمرين 9:

الدالة f معرفة ومستمرة على $[-3;4]$ وجدول تغيراتها مبين في الشكل الموالي :



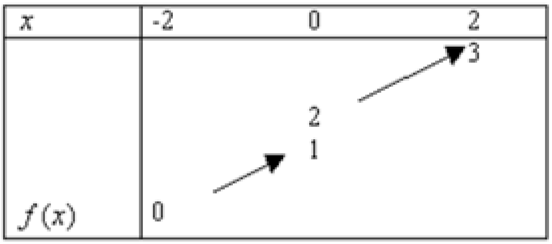
❖المعادلة $f(x)=3$ لها حلين، أحدهما في المجال $[-3;0]$، والآخر في المجال $[0;3]$.

❖المعادلة $f(x)=0$ لها حلين، أحدهما في المجال $[0;3]$، والآخر في المجال $[3;4]$.

❖المعادلة $f(x)=-2$ لها حلين، أحدهما في المجال $[0;3]$، والآخر في المجال $[3;4]$.

حل التمرين 10:

الجدول المبين في الشكل الموالي يلخص تغيرات الدالة f المعرفة على $I=[-2;2]$.



من خلال جدول تغيرات الدالة f نستطيع القول أن: الدالة f ليست مستمرة عند 0.

1) لا نستطيع إيجاد $\alpha \in I$ حيث: $f(\alpha)=\frac{3}{2}$ لأن $\frac{3}{2} \notin [0;1] \cup [2;3]$.

2) الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-2;0[$. ومن أجل كل $x \in]-2;0[$ لدينا $f(x) \in]0;1[$.

وبما أن $0,1 \in]0;1[$ فإنه يوجد عدد وحيد $\beta \in I$ حيث $f(\beta)=0,1$.

3) الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[0;2]$. ومن أجل كل $x \in [0;2]$ لدينا $f(x) \in [2;3]$.

وبما أن $2,5 \in [2;3]$ فإنه يوجد عدد وحيد $\gamma \in I$ حيث $f(\gamma)=2,5$.

تمّ بحمد الله وتوفيقه