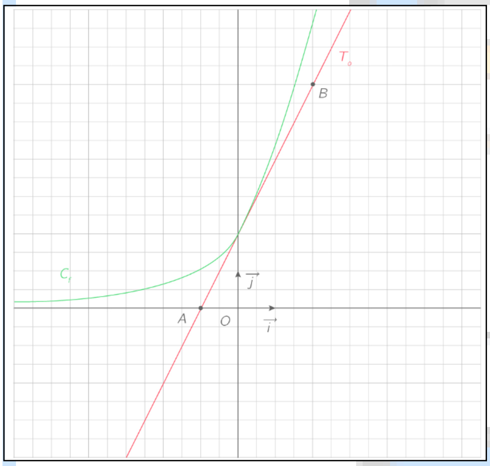
طرق عملية لحل تمارين الاشتقاقية

1. تحديد قيمة $f'(a)$ بيانيا:

❖ بما أن $f'(a)$ هو معامل توجيه المماس لمنحنى الدالة f عند النقطة التي فاصلتها a، نختار نقطتين $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ من هذا المماس، ونحسب معامل توجيهه: $f'(a)=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$.

❖ إذا كان المماس أفقيا، نستنتج أن $f'(a)=0$.

مثال: الشكل المقابل يمثل (C_f) التمثيل البياني للدالة f، T_0 المماس لـ (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0. حدد بيانيا $f'(0)$.



الحل:

❖ بما أن $f'(0)$ هو معامل توجيه T_0، نختار النقطتين $A(-1;0)$ و $B(2;6)$ من T_0، ثم نحسب $f'(0)$.

❖ $f'(0)=\dfrac{6-0}{2-(-1)}=2$.

ومنه فإن $f'(0)=2$.

2. حساب مشتقة دالة:

❖ تحديد مجموعة قابلية اشتقاق الدالة f.

❖ تحديد، حسب عبارة $f(x)$، القاعدة التي تمكننا من حساب $f'(x)$.

❖ إن كانت الدالة f تتضمن دوال وسيطة (جمع، جداء، ...)، حساب مشتقات الدوال الوسيطة.

❖ استنتاج $f'(x)$.

مثال: أوجد مشتقة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بـ: $f(x)=\dfrac{x}{(1+x)^2}$.

الحل:

❖ الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^+$ لأنها حاصل قسمة دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}^+$، مع كون المقام غير معدوم $(\forall x\in\mathbb{R}^+;(1+x)^2>0)$.

❖ نلاحظ أن: $f=\dfrac{u}{v}$ مع $u(x)=x$ و $v(x)=(1+x)^2$. ومنه فإن $f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

❖ $u'(x)=1$.

❖ نلاحظ أن: $v=w^2$ مع $w(x)=1+x$، ومنه فإن $v'=2w'w$ أي: $v'(x)=2(1+x)$.

❖ ومنه فإن $\frac{1-x}{(1+x)^3}=\frac{1+x-2x}{(1+x)^3}=\frac{(1+x)^2-2x(1+x)}{(1+x)^4}=f'(x)$.

نستنتج أنه: $\forall x\in\mathbb{R}^+$ ، $f'(x)=\frac{1-x}{(1+x)^3}$.

3. تحديد إشارة $f'(x)$:

❖ تحديد مجموعة قابلية اشتقاق الدالة f .
❖ تبسيط واختزال عبارة $f'(x)$ لأبعد حد ممكن.
❖ إن كانت $f'(x)$ تتضمن عدة عوامل (جداء، حاصل قسمة، ...)، تحديد إشارة كل عامل على حدة.
❖ استنتاج إشارة $f'(x)$ (عن طريق جدول إن لزم الأمر).

مثال: أدرس إشارة $f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x)^3}$ المعرفة على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

الحل:

بما أن المشتقة f' معرفة على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ، ننتقل لدراسة الإشارة:

❖ $f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x)^3}=\frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)^3}=\frac{(1-x)}{(1+x)^2}$.

❖ $1-x>0 \Leftrightarrow x<1.$

❖ $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\};(1+x)^2>0$.

❖ ومنه فإن جدول إشارة المشتقة f' يكون كالتالي:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x$		+		+	0	−	
$(1+x)^2$		+	0	+		+	
$f'(x)$		+	‖	+	0	−	

4. تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

❖ تحديد مجموعة قابلية اشتقاق الدالة f .
❖ حساب $f'(x)$.
❖ دراسة إشارة $f'(x)$ (عن طريق جدول إن لزم الأمر).
❖ استنتاج رتابة الدالة f :
- إذا كانت f' موجبة على المجال I ، فإن الدالة f متزايدة على المجال I .
- إذا كانت f' سالبة على المجال I ، فإن الدالة f متناقصة على المجال I .

❖ حساب النهايات عند حدود مجموعة تعريف الدالة f ، والقيم الحدية لها.
❖ تشكيل جدول تغيرات الدالة f .

مثال: شكّل جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}$.

الحل:

❖ الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها حاصل قسمة دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$، مع كون المقام غير معدوم $(\forall x\in\mathbb{R};x^2+1>0)$.

❖ نلاحظ أن: $f=\dfrac{u}{v}$ مع $u(x)=3x$ و $v(x)=x^2+1$. ومنه فإن $f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

❖ $u'(x)=3$ ومنه فإن $v'(x)=2x$. و

$$f'(x)=\frac{3\left(x^2+1\right)-3x(2x)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{3x^2+3-6x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-3x^2+3}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-3\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-3(x-1)(x+1)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

❖ $x-1>0\Leftrightarrow x>1.$ $x+1>0\Leftrightarrow x>-1.$ $\forall x\in\mathbb{R};\left(x^2+1\right)^2>0$.

❖ ومنه فإن جدول إشارة المشتقة f' يكون كالتالي:

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
-3	$-$		$-$		$-$	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$	
$(x^2+1)^2$	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	

- f' موجبة على $]-1;1[$ ، ومنه فإن الدالة f متزايدة على $]-1;1[$.
- f' سالبة على $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ ، ومنه فإن الدالة f متناقصة على $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

❖ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x}\right)=0$.

❖ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{x}\right)=0$.

❖ $f(1)=\dfrac{3\times1}{1^2+1}=\dfrac{3}{2}$. $f(-1)=\dfrac{3\times(-1)}{(-1)^2+1}=-\dfrac{3}{2}$.

ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$	
f	0	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	$\frac{3}{2}$	↘	0

5. تحديد معادلة مماس منحنى دالة:

معادلة مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها a هي: $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.

❖ نحسب $f(a)$ ثم $f'(a)$.

❖ نطبق القاعدة السابقة لإيجاد معادلة المماس.

مثال: لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3-3x^2+x-1$. حدد معادلة المماس T لـ (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x=1$.

الحل:

❖ $f(1)=1^3-3\times1^2+1-1=-2$.

❖ الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثيرة حدود، و $\forall x\in\mathbb{R}$، $f'(x)=3x^2-6x+1$.

❖ $f'(1)=3\times1^2-6\times1+1=-2$.

❖ ومنه فإن معادلة المماس T لـ (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x=1$، هي:

$$y=(-2)(x-1)+(-2)=-2x+2-2=-2x$$

أي: $T : y=-2x$.

6. تحديد وضعية منحنى دالة بالنسبة لمماسه:

لتحديد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ $T : y=ax+b$، يجب:

❖ تحديد معادلة المماس إن لم نكن حددناها من قبل.

❖ حساب $f(x)-(ax+b)$.

❖ دراسة إشارة $f(x)-(ax+b)$.

❖ استنتاج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ T:

- على المجالات التي يكون فيها $f(x)-(ax+b)>0$ ، فإن (C_f) يقع فوق T.
- على المجالات التي يكون فيها $f(x)-(ax+b)<0$ ، فإن (C_f) يقع تحت T.
- عندما يكون $f(x)-(ax+b)=0$ ، فإن (C_f) و T يتقاطعان أو أن T مماس لـ (C_f).

مثال: لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3-2x^2+x-4$. حدّد وضعية (C_f) بالنسبة لمماسه T عند النقطة التي فاصلتها 0، والذي معادلته $y=x-4$.

الحل:

❖ $f(x)-(x-4)=x^3-2x^2+x-4-(x-4)=x^3-2x^2=x^2(x-2)$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R}; x^2\geq 0$. $\quad x-2>0 \Leftrightarrow x>2$.

❖ ومنه فإن جدول إشارة $f(x)-(x-4)$ يكون كالتالي:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-(x-4)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

❖ نستنتج أن:

- $\left(C_f\right)$ يقع تحت T على $]-\infty;2[$.
- $\left(C_f\right)$ يقع فوق T على $]2;+\infty[$.
- $\left(C_f\right)$ و T يتقاطعان في النقطة التي فاصلتها 2، و T مماس لـ $\left(C_f\right)$ في النقطة التي فاصلتها 0.

7. تحديد إشارة دالة من خلال جدول تغيراتها:

❖ إذا كانت للدالة f قيمة حدية عظمى سالبة على المجال I، فإن الدالة f سالبة على I.

❖ إذا كانت للدالة f قيمة حدية صغرى موجبة على المجال I، فإن الدالة f موجبة على I.

❖ في الحالات الأخرى، يجب:

- تحديد نهايات الدالة f، وقيمها الحدية.
- تحديد فواصل النقاط التي تغير فيها الدالة f إشارتها.
- استكمال جدول تغيرات الدالة f بتعيين النقاط التي تنعدم فيها الدالة f.
- استنتاج إشارة الدالة f من خلال جدول تغيراتها المكتمل.

مثال: الشكل الموالي يمثل جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
f	-10	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-5	$\nearrow$	10

أدرس إشارة الدالة f على $\mathbb{R}$، علما أن $f(4)=0$.

الحل:

من خلال جدول تغيرات الدالة f، لدينا:

❖ $f(2)=-5$. $\quad f(-5)=-2 \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=10 \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-10$

❖ من خلال نص التمرين، لدينا: $f(4)=0$، ومنه فإن الدالة f تغير إشارتها عند النقطة التي فاصلتها 4.

ومنه فإن جدول تغيراتها يصبح كالتالي:

x	$-\infty$		-5		2		4		$+\infty$
f	-10	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-5	$\nearrow$	0	$\nearrow$	10

❖ من خلال جدول تغيراتها المكتمل، نلاحظ أن:

- $\forall x \in]-\infty;4[\,; f(x) < 0$.
- $\forall x \in]4;+\infty[\,; f(x) > 0$.

- ومنه فإن جدول إشارة الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

8. إيجاد معادلة مماس لمنحنى دالة من خلال نقطة تنتمي إليه:

البحث عن المماس الذي يشمل النقطة $B(x_B;y_B)$، يعود إلى البحث عن الفاصلة a للنقطة التي يكون فيها المستقيم مماسا لمنحنى دالة.

- بما أن المماس يشمل النقطة $B(x_B;y_B)$، فإن إحداثيات B تحقق معادلة المماس ومنه فإن: $y_B = f'(a)(x_B - a) + f(a)$.
- نثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق ثم نحسب $f'(x)$ (إن لم تكن لدينا عبارة $f'(x)$).
- نكتب $f(a)$ و $f'(a)$ بدلالة a. ثم نحل المعادلة ذات المجهول a المتحصل عليها.
- في الأخير، نستنتج وجود المماس المطلوب والذي تكون معادلته: $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

مثال: لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^2$. حدد معادلة المماسات الممكنة لـ (C_f) والتي تشمل النقطة $B(2;3)$.

الحل:

- معادلة المماس T_a هي: $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. وبما أن T_a تشمل أيضا النقطة $B(2;3)$، فإن إحداثيات B تحقق معادلة المماس، ومنه فإن: $3 = f'(a)(2-a) + f(a)$.
- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها ثلاثي حدود ولدينا: $\forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = 2x$. ومنه فإن $f(a) = a^2$ و $f'(a) = 2a$.
- إذن: علينا حل المعادلة $3 = 2a(2-a) + a^2$.
- $3 = 2a(2-a) + a^2 \Leftrightarrow 4a - 2a^2 + a^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow -a^2 + 4a - 3 = 0$
- $\Delta = 4 > 0 \Rightarrow a_1 = 3 \;;\; a_2 = 1$.

المعادلة لها حلان هما 1 و 3، ومنه فإن (C_f) يقبل مماسين يشملان النقطة $B(2;3)$، أحدهما عند النقطة التي فاصلتها 1، والآخر عند النقطة التي فاصلتها 3، معادلاتهما على الترتيب هي: $T_1 : y = 2x - 1$ و $T_3 : y = 6x - 9$.

9. إيجاد معادلة مماس من خلال معامل توجيهه:

البحث عن مماس معامل توجيهه b، يعود إلى البحث عن الفاصلة a للنقطة التي يكون فيها المستقيم مماسا لمنحنى الدالة.

- المماس T_a له معامل توجيه b، إذا وفقط إذا كان $f'(a)=b$.
- نثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق ثم نحسب $f'(x)$ (إن لم تكن لدينا عبارة $f'(x)$).
- نكتب $f'(a)$ بدلالة a. ثم نحل المعادلة $f'(a)=b$.
- في الأخير، نستنتج وجود المماس المطلوب والذي تكون معادلته: $y=b(x-a)+f(a)$.

مثال: لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=4x^2-8x+1$. حدد معادلة المماسات الممكنة لـ (C_f) والتي يكون معامل توجيهها 4.

الحل:

- بما أن معامل توجيه T_a هو 4، فإن معادلته هي: $y=4(x-a)+f(a)$ (1).
- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها ثلاثي حدود ولدينا: $\forall x\in\mathbb{R}; f'(x)=8x-8$. ومنه فإن: $f'(a)=8a-8$.
- إذن: علينا حل المعادلة $8a-8=4$.
- $8a-8=4 \Leftrightarrow 8a=12 \Leftrightarrow a=\frac{12}{8} \Leftrightarrow a=\frac{3}{2}$.
- $(1) \Leftrightarrow y=4\left(x-\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)=4\left(x-\frac{3}{2}\right)+4\left(\frac{3}{2}\right)^2-8\left(\frac{3}{2}\right)+1=4x-8$.
- إذن المماس لـ (C_f) الذي معامل توجيهه 4، هو المماس عند النقطة التي فاصلتها $\frac{3}{2}$، ومعادلته هي:

$T_{\frac{3}{2}}: y=4x-8$.

10. إيجاد معادلة مماس مواز لمستقيم:

نعلم أن مستقيمين متوازيين لهما نفس معامل التوجيه، ومنه فإن البحث عن مماس مواز لمستقيم، يعود إلى البحث عن الفاصلة a للنقطة التي يكون فيها المستقيم مماسا لمنحنى الدالة وله نفس معامل توجيه المستقيم.

- المماس T_a له معامل توجيه b إذا وفقط إذا كان $f'(a)=b$.
- نثبت أن الدال f قابلة للاشتقاق ثم نحسب $f'(x)$ (إن لم تكن لدينا عبارة $f'(x)$).
- نكتب $f'(a)$ بدلالة a. ثم نحل المعادلة $f'(a)=b$.
- في الأخير، نستنتج وجود المماس المطلوب والذي تكون معادلته: $y=b(x-a)+f(a)$.

مثال: لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-2x^2+4x+3$. حدد معادلة المماسات الممكنة لـ (C_f) والتي تكون موازية للمستقيم الذي معادلته: $y=6x-2$.

الحل:

❖ بما أن T_a مواز للمستقيم الذي معادلته: $y=6x-2$ ، فإن معامل توجيهه هو 6، ومعادلته تكون: $y=6(x-a)+f(a)$.(1)

❖ الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها ثلاثي حدود ولدينا: $\forall x\in\mathbb{R}; f'(x)=-4x+4$. ومنه فإن: $f'(a)=-4a+4$.

❖ إذن: علينا حل المعادلة $-4a+4=6$.

❖ $-4a+4=6 \Leftrightarrow -4a=2 \Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}$.

❖ $(1) \Leftrightarrow y=6\left(x+\frac{1}{2}\right)+f\left(-\frac{1}{2}\right)=6x+3-\frac{1}{2}-2+3=6x+\frac{7}{2}$.

❖ إذن المماس لـ (C_f) الموازي للمستقيم الذي معادلته: $y=6x-2$ ، هو المماس عند النقطة التي فاصلتها $\left(-\frac{1}{2}\right)$ ، ومعادلته هي: $T_{\left(-\frac{1}{2}\right)} : y=6x+\frac{7}{2}$.

11. إيجاد إشارة المشتقة من خلال التمثيل البياني لدالة:

التمثيل البياني لدالة يمكن من معرفة إشارة مشتقتها وذلك من خلال تغيراتها.

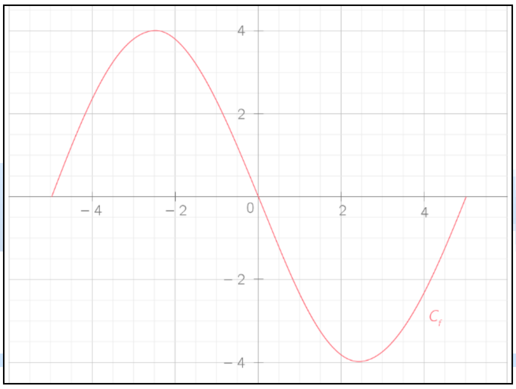
❖ نذكّر أنه:

- إذا كانت الدالة f متزايدة على مجال I ، فإن مشتقتها f' تكون موجبة على I .
- إذا كانت الدالة f متناقصة على مجال I ، فإن مشتقتها f' تكون سالبة على I .

❖ نحدد، من خلال التمثيل البياني، القيم الحدية للدالة f . ثم نحدد، حسب قيم x ، تغيرات الدالة f .

❖ نستطيع عندها استنتاج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x ، وتشكيل جدول إشارة لـ $f'(x)$.

مثال: الشكل الموالي يمثل الدالة f المعرفة على $[-5;5]$. حدد إشارة مشتقتها f' على المجال $[-5;5]$.



الحل: من خلال الشكل، نلاحظ أن:

❖ للدالة f قيمة حدية عظمى عند $(-2,5)$ هي $f(-2,5)=4$ ، وقيمة حدية صغرى عند $(2,5)$ هي $f(2,5)=-4$.

❖ الدالة f متزايدة على $[-5;-2,5]$ و $[2,5;5]$ ، وأنها متناقصة على $[-2,5;2,5]$.

❖ ومنه فإن جدول إشارة f' يكون كالتالي:

x	-5		$-2,5$		$2,5$		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

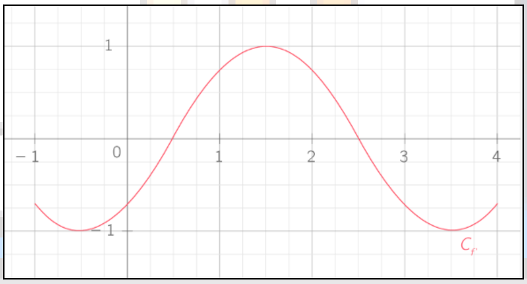
12. إيجاد تغيرات دالة من خلال التمثيل البياني لمشتقتها:

❖ يمكننا التمثيل البياني لـ f' مشتقة الدالة f من معرفة تغيرات الدالة f ، وذلك من خلال دراسة إشارة f' . ولتحديد إشارة $f'(x)$ بيانيا:

- $f'(x)>0$ عندما يكون تمثيلها البياني فوق محور الفواصل.
- $f'(x)<0$ عندما يكون تمثيلها البياني تحت محور الفواصل.

❖ نستنتج عندها تغيرات الدالة f .

مثال: الشكل الموالي يمثل الدالة f' مشتقة الدالة f المعرفة على $[-1;4]$. حدد تغيرات الدالة f على المجال $[-1;4]$.



الحل: من خلال الشكل، نلاحظ أن:

❖ $f'(x)<0$ على $[-1;0,5]$ و $[2,5;4]$، و $f'(x)>0$ على $[0,5;2,5]$.

ومنه فإن جدول إشارة f' يكون كالتالي:

x	-1		$0,5$		$2,5$		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

❖ ومنه نستنتج أن: الدالة f متناقصة على $[-1;0,5]$ و $[2,5;4]$، وأنها متزايدة على $[0,5;2,5]$.

تمّ بحمد الله وتوفيقه