ملخص درس الاشتقاقية

I. العدد المشتق:

1. تعريف العدد المشتق:

❖ نقول عن الدالة f المعرفة على المجال I من $\mathbb{R}$، أنها قابلة للاشتقاق عند a من I إذا قبلت النسبة $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ نهاية منتهية لما h يؤول إلى 0.

❖ نسمي هذه النهاية العدد المشتق للدالة f عند a، ونرمز لها بالرمز $f'(a)$. لدينا إذن: $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ أو عند وضع $x=a+h$: $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

ملاحظة:

❖ إذا كانت الدالة f معرفة على يسار وعلى يمين a، فلكي تكون الدالة f قابلة للاشتقاق عند a يجب أن تكون: $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

❖ وإذا كانت $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\neq\lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند a، والنقطة $A(a;f(a))$ تسمى نقطة زاوية (أي أن (C_f) يقبل عند النقطة A نصفي مماسين يصنعان بينهما زاوية α).

2. المماس لمنحنى دالة عند النقطة a:

❖ ليكن a عددا حقيقيا من I. إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند a، فإن تمثيلها البياني يقبل مماسا عند النقطة $(a;f(a))$، معامل توجيهه $f'(a)$، معادلته: $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

3. المماس العمودي لمنحنى دالة:

إذا كانت f دالة مستمرة عند a، و $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty$، فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند a والمنحنى (C_f) يقبل عند النقطة $A(a;f(a))$ مماسا عموديا (موازيا لمحور التراتيب) معادلته: $x=a$.

II. الدالة المشتقة:

1. تعريف الدالة المشتقة:

❖ تكون الدالة f قابلة للاشتقاق على I، إذا وفقط إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل x من I. وتسمى الدالة المشتقة للدالة f على I، ونرمز لها بـ: $f':x\to f'(x)$.

2. المشتقات المتتابعة:

❖ إذا كانت الدالة f' قابلة للاشتقاق على المجال I، فإن الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي x من I العدد الحقيقي $f''(x)$ تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة f.

❖ و هكذا إذا قبلت الدالة f الاشتقاق n مرة (حيث $n \geq 2$) على المجال I ، فإن الدالة المشتقة النونية للدالة f ونرمز لها بـ: $f^{(n)}$ تكتب كما يلي: $f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x) \right]'$.

3. نقطة الانعطاف:

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين على المجال I من $\mathbb{R}$ ، وكانت $f''(x)$ تنعدم عند x_0 من I مغيرة إشارتها في جوار x_0 ، فإن المنحنى البياني (C_f) له نقطة انعطاف $A(x_0; f(x_0))$ ، والمماس لـ (C_f) عند A يخترق (C_f).

III. المشتقات و العمليات:

1. مشتقات دوال مرجعية:

$f(x)$	$f'(x)$	مجال قابلية الاشتقاق
k (k ثابت حقيقي)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
x^n ($n \geq 2$ و $n \in \mathbb{N}$)	$n \times x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R} - \left\{ k\dfrac{\pi}{2} \right\} / k \in \mathbb{Z}$

ملاحظة:

❖ الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

❖ الدوال الناطقة قابلة للاشتقاق على كل مجال محتوى في مجموعة تعريفها.

2. العمليات على المشتقات:

ليكن k عددا حقيقيا، و u ; v دالتين قابلتين للاشتقاق على I .

f	$u+v$	$k \times u$	$u \times v$	$\dfrac{1}{v}$ $(v \neq 0)$	$\dfrac{u}{v}$ $(v \neq 0)$
f'	$u'+v'$	ku'	$u'v+v'u$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	$\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

3. مشتقات الدوال المركبة:

ليكن a و b عددان حقيقيان حيث: $a \neq 0$، $n \in \mathbb{N}$، u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على I.

f	$u(ax+b)$	$v \circ u$	$\sqrt{u}$ $(u(x)>0)$	u^n $(n \geq 2)$	$\frac{1}{u^n}$ $(u^n \neq 0 / n \geq 1)$
f'	$a \times u'(ax+b)$	$u' \times v'[u(x)]$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$n \times u' \times u^{n-1}$	$-\frac{n \times u'}{u^{n+1}}$

IV. تطبيقات الاشتقاق:

1. اتجاه تغير دالة:

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من D_f:

- ❖ إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)>0$ فإن الدالة f متزايدة تماما على I.
- ❖ إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)<0$ فإن الدالة f متناقصة تماما على I.
- ❖ إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)=0$ فإن الدالة f ثابتة على I.

2. القيم الحدية لدالة:

f دالة قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح I، و a عدد حقيقي من I:

- ❖ إذا كانت الدالة f تقبل قيمة حدية عند a، فإن $f'(a)=0$ و f' تغير إشارتها عند a.
- ❖ إذا كانت f' تنعدم مغيرة إشارتها عند a، فإن $f(a)$ قيمة حدية للدالة f.
- ❖ إذا كانت f' تنعدم عند a مغيرة إشارتها من موجب إلى سالب، فإن $f(a)$ قيمة حدية صغرى للدالة f.
- ❖ إذا كانت f' تنعدم عند a مغيرة إشارتها من سالب إلى موجب، فإن $f(a)$ قيمة حدية عظمى للدالة f.

3. المماس الأفقي لمنحنى دالة:

- ❖ إذا كانت الدالة f تقبل قيمة حدية عند a، فإن (C_f) التمثيل البياني للدالة f يقبل مماسا أفقيا موازيا لمحور الفواصل عند النقطة $A(a; f(a))$.

4. حل المعادلات من الشكل $f(x)=k$:

f دالة قابلة للاشتقاق على المجال $[a;b]$.

- ❖ إذا كانت $f'>0$ على المجال $[a;b]$ فإنه من أجل كل k من $[f(a);f(b)]$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a;b]$.
- ❖ إذا كانت $f'<0$ على المجال $[a;b]$ فإنه من أجل كل k من $[f(b);f(a)]$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a;b]$.

5. استعمال العدد المشتق في حساب بعض النهايات:

نستطيع استعمال العدد المشتق لتعيين نهاية بعض الدوال عند a، وذلك لإزالة حالة عدم تعيين.

❖ إذا كانت لدينا عبارة من الشكل $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ مع f دالة قابلة للاشتقاق عند a، فإن:

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$.

6. التقريب التآلفي:

f دالة قابلة للاشتقاق على المجال I، و $x+h$ عدد حقيقي من I:

❖ إذا قبلت f الاشتقاق عند x من I، فإنه توجد دالة ε بحيث من أجل كل عدد حقيقي h لدينا:

$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+h\varepsilon(h)$ مع $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$.

❖ من أجل h قريب من الصفر نكتب عندئذ: $f(x+h)\approx f(x)+hf'(x)$، يسمى هذا التقريب التآلفي لـ $f(x+h)$ من أجل h قريب من الصفر، المرفق بالدالة f.

7. طريقة أولر:

❖ تسمح هذه الطريقة بإنشاء تمثيلات بيانية تقريبية لدالة f بمعرفة الدالة المشتقة f' للدالة f وقيمة لـ f عند عدد $y_0=f(x_0)$ بدون معرفة العبارة الصريحة لـ f. وهذه الطريقة تعتمد على أنه من أجل h قريب من الصفر يكون $f(x+h)$ قريبا من $f(x)+h\times f'(x)$.

تمّ بحمد الله وتوفيقه