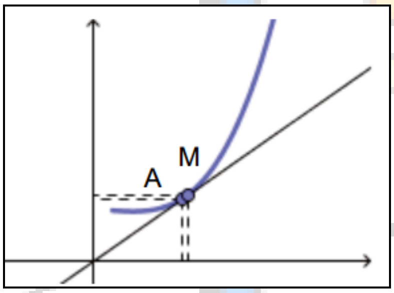
الاشتقاقية

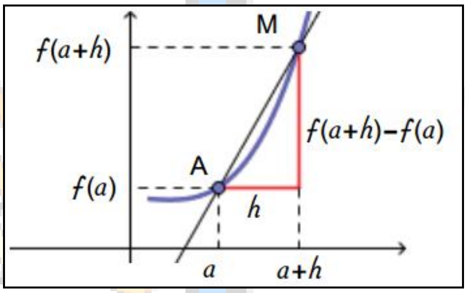
I. العدد المشتق – الدالة المشتقة:

1. تعريف 1:

نقول عن الدالة f المعرفة على المجال I من $\mathbb{R}$، أنها قابلة للاشتقاق عند a من I إذا قبلت النسبة $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ نهاية محدودة لما يؤول h إلى 0.

نسمي هذه النهاية العدد المشتق للدالة f عند a، ونرمز لها بالرمز $f'(a)$. لدينا إذن: $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ أو عند وضع $x=a+h$، $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.





2. طريقة:

لدراسة قابلية اشتقاق الدالة f عند a، ندرس $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

3. ملاحظة:

إذا قبلت الدالة f الاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من I نقول أنها تقبل الاشتقاق على I، وتسمى الدالة المشتقة للدالة f ونرمز لها بـ: $f':x\to f'(x)$.

4. مثال:

الدالة المشتقة للدالة $f:x\to\dfrac{1}{x}$ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ هي الدالة $f':x\to\dfrac{-1}{x^2}$.

II. الاشتقاق والاستمرارية:

1. خاصية:

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على المجال I، فإنها مستمرة على هذا المجال.

2. ملاحظة:

عكس هذه الخاصية ليس دائما صحيحا.

Latreche MIFA

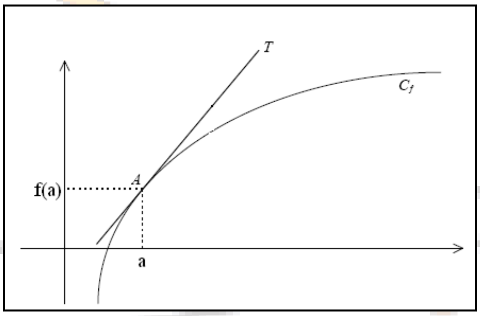
3. مثال:

الدالة $x \to |x|$ مستمرة عند 0 ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند 0. لدينا: $\lim_{x\to 0}|x| = 0$ بينما النسبة $\frac{|h|}{h}$ لا تقبل نهاية عند 0 لأن $\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{|h|}{h} = -1$ و $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{|h|}{h} = 1$.

III. المماس لمنحنى دالة عند النقطة a:

1. تعريف:

f دالة معرفة على المجال I الذي يشمل a و (C_f) تمثيلها البياني.
إذا قبلت الدالة f الاشتقاق عند a فإن (C_f) يقبل عند النقطة $A(a;f(a))$ مماسا (T) معامل توجيهه $f'(a)$ ومعادلته: $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.



2. مثال:

الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ ،
قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$ ، ومنه $f'(0) = -2$ ، إذن (C_f) يقبل مماسا (d) عند $A(0;0)$ معادلته $y = -2x$.

IV. المشتق من اليمين ومن اليسار عند عدد معين:

1. تعريف:

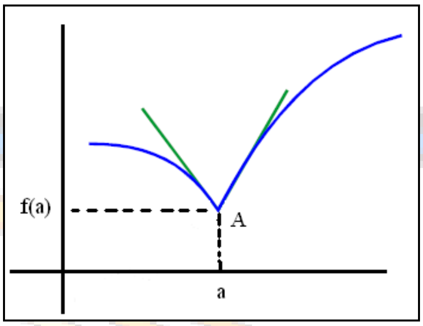
f دالة معرفة ومستمرة على المجال I الذي يشمل a.
إذا كانت النسبة $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ تقبل النهاية ℓ_1 من اليمين عند a نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق من اليمين عند a.
إذا كانت النسبة $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ تقبل النهاية ℓ_2 من اليسار عند a نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق من اليسار عند a.
إذا كانت $\ell_1 = \ell_2$ فإن الدالة f قابلة للاشتقاق عند a.
إذا كانت $\ell_1 \neq \ell_2$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند a والنقطة $A(a;f(a))$ تسمى نقطة زاوية.

2. التفسير الهندسي:

❖إذا كانت الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند a وقابلة للاشتقاق من اليمين عند a فإن (C_f) يقبل نصف مماس من اليمين عند النقطة $A(a;f(a))$ معامل توجيهه ℓ_1 ومعادلته: $y=\ell_1(x-a)+f(a)$.

❖إذا كانت الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند a وقابلة للاشتقاق من اليسار عند a فإن (C_f) يقبل نصف مماس نصف مماس من اليسار عند النقطة **A** معامل توجيهه ℓ_2 ومعادلته: $y=\ell_2(x-a)+f(a)$.

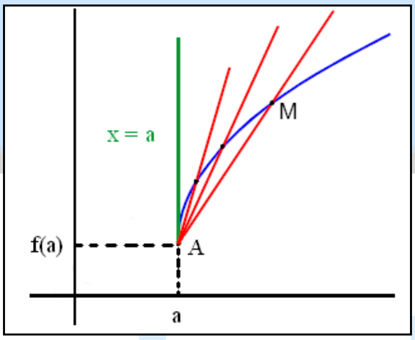
❖أي أن (C_f) يقبل عند النقطة A نصفي مماسين يصنعان بينهما زاوية α.



V. المماس العمودي لمنحنى دالة:

1. تعريف:

إذا كانت f دالة مستمرة عند a و $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty$ أو $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\infty$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند a والمنحنى (C_f) يقبل عند النقطة $A(a;f(a))$ مماسا عموديا (موازيا لحامل محور التراتيب) معادلته: $x=a$.



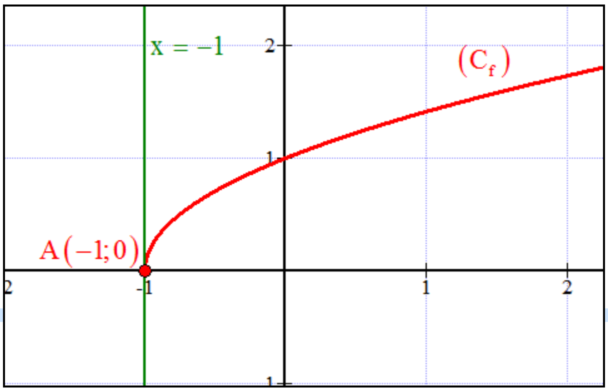
2. مثال:

الدالة f معرفة على المجال $[-1;+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\sqrt{x+1}$ و (C_f)تمثيلها البياني. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند (-1) ، ثم فسر النتيجة المحصل عليها هندسيا.

الحل:

من أجل $x\geq -1$ لدينا: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}=+\infty$ ، ومنه فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 1- والمنحنى (C_f) يقبل عند النقطة $A(-1;0)$ مماسا عموديا معادلته: $x=-1$.

Latreche MIFA



VI. مشتقات دوال مألوفة:

$f(x)$	$f'(x)$	مجالات قابلية الاشتقاق
k (k ثابت حقيقي)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$	$\mathbb{R} - \left\{k\dfrac{\pi}{2}\right\} / k \in \mathbb{Z}$

نتيجة:

- الدوال كثيرة حدود قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
- الدوال الناطقة قابلة للاشتقاق على كل مجال محتوى في مجموعة تعريفها.

VII. المشتقات والعمليات على الدوال:

u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$، و k عدد حقيقي.

الدالة	$u+v$	ku	uv	$\dfrac{1}{v}$ $(v \neq 0)$	$(v \neq 0)$ $\dfrac{u}{v}$
الدالة المشتقة	$u'+v'$	ku'	$u'v+v'u$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	$\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

Latreche MIFA

VIII. اشتقاق الدالة $u(ax+b)$:

a و b عددان حقيقيان حيث $a \neq 0$، u دالة قابلة للاشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$، ليكن J المجال المكوّن من الأعداد الحقيقية x حيث $ax+b$ ينتمي إلى J.
الدالة $f: x \to u(ax+b)$ قابلة للاشتقاق على J ولدينا من أجل كل x من J: $f'(x)=au'(ax+b)$.

مثال:
عيّن الدالة المشتقة للدالة: $f(x)=\sin(2x+1)$.
الحل: الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x)=2\cos(2x+1)$.

IX. اشتقاق دالة مركبة:

1. مشتقة الدالة $v \circ u$:

إذا قبلت الدالة u الاشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$ وقبلت الدالة v الاشتقاق على المجال $u(I)$، فإن الدالة $v \circ u$ تقبل الاشتقاق على I ولدينا من أجل كل x من I: $(v \circ u)'(x)=u'(x)\times v'[u(x)]$.

مثال:
عيّن الدالة المشتقة للدالة: $f(x)=(x^2+1)^3$.
- نضع $f=v \circ u$ حيث $u(x)=x^2+1$ و $v(x)=x^3$.
- الدالتان u و v قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ومنه فإن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
- من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $u'(x)=2x$ و $v'(x)=3x^2$، ومنه فإن: $f'(x)=6x(x^2+1)^2$.

2. مشتقة الدالة $x \to \sqrt{u(x)}$:

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$ وكانت موجبة تماما على I، فإن الدالة $\sqrt{u}$ تقبل الاشتقاق على I ولدينا من أجل كل x من I: $(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

مثال:
عيّن الدالة المشتقة للدالة: $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.
- نضع $f=v \circ u$ حيث $u(x)=x^2+1$ و $v(x)=\sqrt{x}$.
- الدالة u قابلة للاشتقاق وموجبة تماما على $\mathbb{R}$، والدالة v قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ومنه فإن f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$.
- من أجل كل x من $]0;+\infty[$ لدينا: $u'(x)=2x$ و $v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$،
و $f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$ أي $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

3. مشتقة الدالة $x \to [u(x)]^n$ مع ($n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$):

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$، فإن الدالة u^n تقبل الاشتقاق على I ولدينا من أجل كل x من I: $(u^n)' = n \times u' \times u^{n-1}$.

مثال:

عيّن الدالة المشتقة للدالة: $f(x) = (2x^2 + x)^4$.

❖ نضع $f(x) = (u(x))^4$ حيث $u(x) = 2x^2 + x$.

❖ الدالة u معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ومنه فإن f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

❖ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $u'(x) = 4x + 1$ ومنه فإن: $f'(x) = 4(4x+1)(2x^2+x)^3$.

4. مشتقة الدالة $x \to \dfrac{1}{[u(x)]^n}$ مع ($n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 1$):

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$ ولا تنعدم على I، فإن الدالة $\dfrac{1}{u^n}$ تقبل الاشتقاق على I ولدينا من أجل كل x من I: $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{n \times u'}{u^{n+1}}$.

مثال:

عيّن الدالة المشتقة للدالة: $f(x) = \dfrac{1}{(x^2 + x + 1)^4}$.

❖ نضع $f(x) = \dfrac{1}{(u(x))^4}$ حيث $u(x) = x^2 + x + 1$.

❖ الدالة u معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $u(x) > 0$، ومنه فإن f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

❖ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $u'(x) = 2x + 1$ ومنه فإن: $f'(x) = -\dfrac{4(2x+1)}{(x^2+x+1)^5}$.

Latreche MIFA

X. المشتقات المتتابعة لدالة:

1. تعريف:

- إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال I، فإن الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي x من I العدد الحقيقي $f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة الأولى للدالة f.
- وإذا كانت الدالة f' قابلة للاشتقاق على المجال I، فإن الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي x من I العدد الحقيقي $(f'(x))'$ تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة f، ونرمز لها بـ f'' أو f^2 .
- وهكذا إذا قبلت الدالة f الاشتقاق n مرة (حيث $n \geq 2$) على المجال I، فإن الدالة المشتقة النونية للدالة f ونرمز لها بـ $f^{(n)}$ تكتب كما يلي: $f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'$.

2. مثال:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x) = x^4$. الدالة f قابلة للاشتقاق n مرة، وأنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$f^{(1)}(x) = 4x^3$، $f^{(2)}(x) = 12x^2$، $f^{(3)}(x) = 24x$، $f^{(4)}(x) = 24$،

ومن أجل كل عدد طبيعي $n \geq 5$ لدينا: $f^{(n)}(x) = 0$

XI. نقطة الانعطاف:

1. تعريف:

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين على المجال I من $\mathbb{R}$ وكانت $f''(x)$ تنعدم عند x_0 من I مغيرة إشارتها في جوار x_0، فإن المنحنى البياني (C_f) للدالة f له نقطة انعطاف $A(x_0;f(x_0))$، والمماس لـ (C_f) عند A يخترق (C_f).

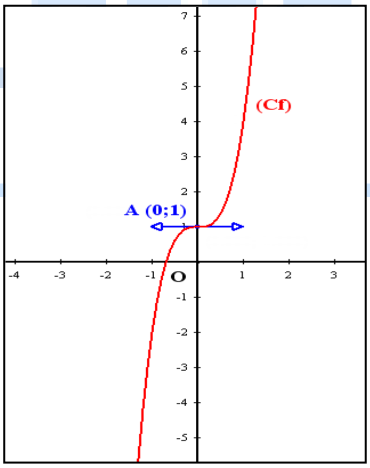
2. مثال:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x) = 3x^3 + 1$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $f'(x) = 9x^2$ و $f''(x) = 18x$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. إذن $f''(x)$ تنعدم عند $x_0 = 0$ مغيرة إشارتها في جوار 0،

ومنه فإن النقطة $A(0;1)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f).



XII.تطبيقات الاشتقاق:

1. اتجاه تغير دالة:

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال Iمن D_f :

- ❖إذا كان من أجل كل x من I لدينا $f'(x) > 0$ فإن الدالة f متزايدة تماما على I.
- ❖إذا كان من أجل كل x من I لدينا $f'(x) < 0$ فإن الدالة f متناقصة تماما على I.
- ❖إذا كان من أجل كل x من I لدينا $f'(x) = 0$ فإن الدالة f ثابتة على I.

مثال:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x) = x^3$. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $f'(x) = 3x^2$، ومن أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ لدينا: $f'(x) > 0$ و $f'(0) = 0$.

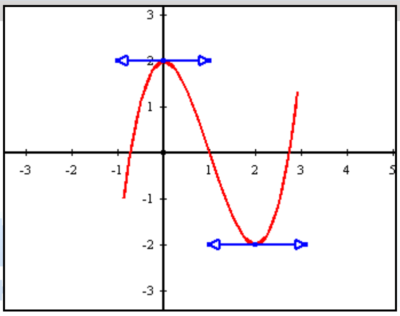
إذن الدالة f' موجبة على $\mathbb{R}$ وتنعدم عند 0، وبالتالي فإن f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

x			
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗	0	↗

2. القيم الحدية لدالة:

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ يشمل c.

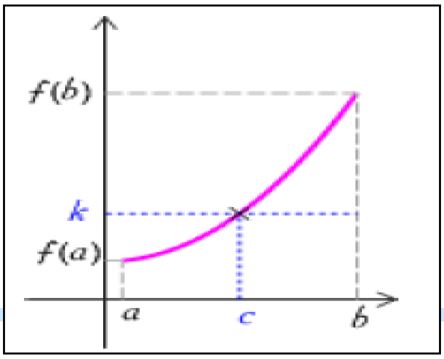
القول أن $f(c)$ قيمة حدية عظمى (صغرى) للدالة f، يعني أنه نستطيع إيجاد مجال مفتوح J محتوى في I ويشمل c بحيث من أجل كل x من J لدينا $f(x) \le f(c)$ ($f(x) \ge f(c)$).



3. حل المعادلات:

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال $I = [a;b]$.

❖إذا كانت $f' > 0$ ($f' < 0$) على المجال $[a;b]$ فإنه من أجل كل k من $[f(a);f(b)]$ ($[f(b);f(a)]$)، المعادلة f(x)=k تقبل حلا وحيدا في المجال $[a;b]$.



4. استعمال العدد المشتق في حساب بعض النهايات:

نستطيع استعمال العدد المشتق لتعيين نهاية بعض الدوال عند a وذلك لإزالة حالة عدم تعيين. إذا كانت لدينا عبارة من الشكل $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ مع f دالة قابلة للاشتقاق عند a فإن: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$.

مثال:

لدينا: $g(x)=\frac{\cos x-1}{x}$. نريد حساب $\lim_{x\to 0}g(x)$.

الحل:

- ❖ نلاحظ أن $\lim_{x\to 0}(\cos x-1)=0$ و $\lim_{x\to 0}x=0$، ومنه $\lim_{x\to 0}g(x)$ هي حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$.
- ❖ لإزالة حالة عدم التعيين نستعمل العدد المشتق، وذلك بوضع: $f(x)=\cos x$، نجد $f(0)=1$ وبالتالي فإن $g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$، وبما أن f قابلة للاشتقاق عند 0 فإن $\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$.
- ❖ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $f'(x)=-\sin x$، ومنه فإن $f'(0)=0$، إذن $\lim_{x\to 0}g(x)=0$.

XIII. التقريب التآلفي وطريقة أولر:

1. التقريب التآلفي:

f دالة معرفة على مجال مفتوح I.
إذا قبلت f الاشتقاق عند x من I، فإنه توجد دالة ε بحيث من أجل كل عدد حقيقي h مع $(x+h)\in I$ لدينا: $f(x+h)=f(x)+hf'(x)+h\varepsilon(h)$ مع $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$.
من أجل h قريب من الصفر نكتب عندئذ: $f(x+h)\approx f(x)+hf'(x)$، يسمى هذا التقريب التآلفي لـ f(x+h)، من أجل h قريب من الصفر، المرفق بالدالة f.

مثال:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بحيث $f'(x)=\sqrt{x^2+1}$ و $f(1)=2$. باستعمال خطوة قدرها 0,1 أوجد القيمة التقريبية لـ $f(1,1)$ و $f(1,2)$.

الحل:

لدينا من تعريف التقريب التآلفي: $f(x+h)\approx f(x)+hf'(x)$ ومنه فإن:

- $f(1{,}1)\approx f(1)+0{,}1\times f'(1)\approx 2+0{,}1\times\sqrt{2}\approx 2{,}141$.
- $f(1{,}2)\approx f(1{,}1)+0{,}1\times f'(1{,}1)\approx 2{,}141+0{,}1\times\sqrt{2{,}21}\approx 2{,}289$.

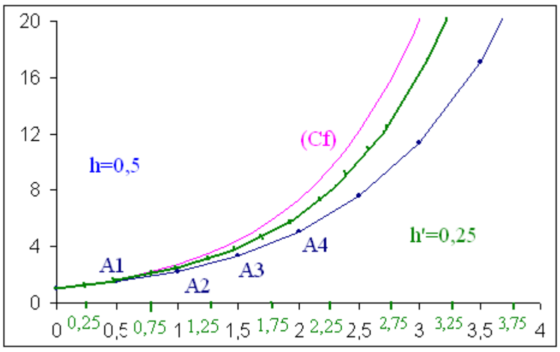
2. طريقة أولر:

تسمح هذه الطريقة بإنشاء تمثيلات بيانية تقريبية لدالة f بمعرفة الدالة المشتقة f' للدالة f وقيمة لـ f عند عدد $y_0=f(x_0)$ بدون معرفة العبارة الصريحة لـ f.

و هذه الطريقة تعتمد على أنه من أجل h قريب من الصفر يكون f(x+h) قريبا من $f(x)+h\times f'(x)$.

الطريقة بالتفصيل:

- بما أنه لدينا شرط أولي للدالة f هو $y_0=f(x_0)$ نستطيع أن نعين نقطة من المنحنى البياني لـ f و هي النقطة $A_0(x_0;y_0)$.
- انطلاقا من النقطة $A_0(x_0;y_0)$ ننشئ النقطة $A_1(x_1;y_1)$ حيث: $\begin{cases}x_1=x_0+h\\ y_1=f(x_0)+h\times f'(x_0)\end{cases}$ مع h قريب جدا من الصفر.
- ثم انطلاقا من النقطة $A_1(x_1;y_1)$ ننشئ النقطة $A_2(x_2;y_2)$ حيث: $\begin{cases}x_2=x_1+h\\ y_2=f(x_1)+h\times f'(x_1)\end{cases}$.
- بما أن h قريب جدا من الصفر، فإن النقاط A_1, A_2, A_3 ... تكون قريبة جدا من منحنى (C_f) f.
- بربط النقاط A_1, A_2, A_3 ... ببعضها البعض نحصل على تمثيل بياني تقريبي لـ f مرتبط باختيار h الذي يسمى الخطوة، أي أنه كلما كان مقدار الخطوة h قريبا من الصفر، كان التمثيل البياني التقريبي لـ f قريبا من التمثيل البياني الحقيقي (C_f) للدالة f.



تمّ بحمد الله وتوفيقه