حلول تمارين درس الاشتقاقية -الجزء 1-

فهرس حلول التمارين

حل التمرين 1:

1) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2-x+1$ ، و (C_f) تمثيلها البياني.

$f(2)=2^2-2+1=4-2+1=3$. ومنه فإن: ترتيب النقطة A التي تنتمي لـ (C_f)، والتي فاصلتها 2 هو 3، ومنه فإن إحداثيات A هي: $A(2;3)$.

2)

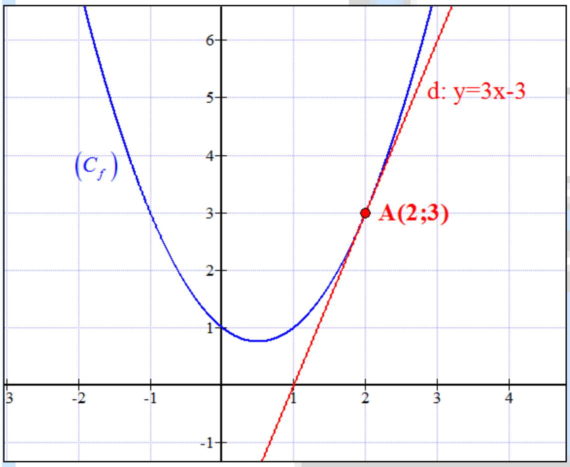
❖ $f(2+h)=(2+h)^2-(2+h)+1=4+4h+h^2-2-h+1$

ومنه فإن: $f(2+h)=h^2+3h+3$.

❖ $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\dfrac{h^2+3h+3-3}{h}=\dfrac{h^2+3h}{h}=\dfrac{h(h+3)}{h}$

ومنه فإن: $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=h+3$.

3) عندما يؤول h إلى 0، العدد $h+3$ يؤول إلى 3. ومنه فإن: $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to0}h+3=3$.



نستنتج إذن أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 2 و $f'(2)=3$.

4) معامل توجيه المستقيم d هو 3، ومنه فإن معادلته تكون من الشكل: $y=3x+b$.

المستقيم d يشمل النقطة A(2;3) ، ومنه فإن: $3=3\times2+b$

أي: $b=3-6$ أي: $b=-3$.

نستنتج أن معادلة المستقيم d هي: $y=3x-3$.

5) الشكل المقابل يمثل (C_f) و d .

حل التمرين 2:

1) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x^2-x$.

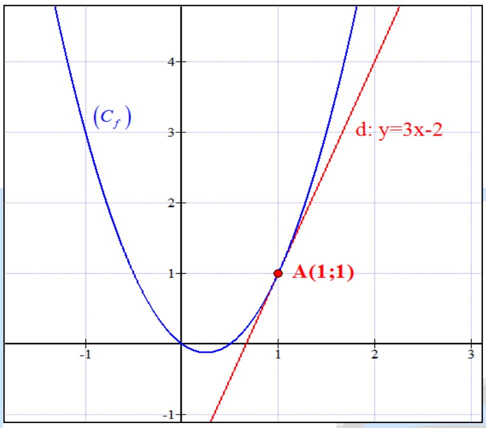
❖ $f(1)=2\times1^2-1=1$.

❖ $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{2(1+h)^2-(1+h)-1}{h}=\dfrac{2+4h+2h^2-1-h-1}{h}$

$=\dfrac{2h^2+3h}{h}=\dfrac{h(2h+3)}{h}$

ومنه فإن: $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=2h+3$.

❖ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0} h+3=3.$



نستنتج إذن أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 1 و $f'(1)=3$.

2) يمكن التأكد من النتائج المتحصل عليها برسم التمثيل البياني للدالة f، والمستقيم d الذي معامل توجيهه 3 ويشمل النقطة من (C_f) التي فاصلتها 1، $(d: y=3x-2)$.

الشكل المقابل يمثل (C_f) والمستقيم d.

حل التمرين 3:

1) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-x^2$.

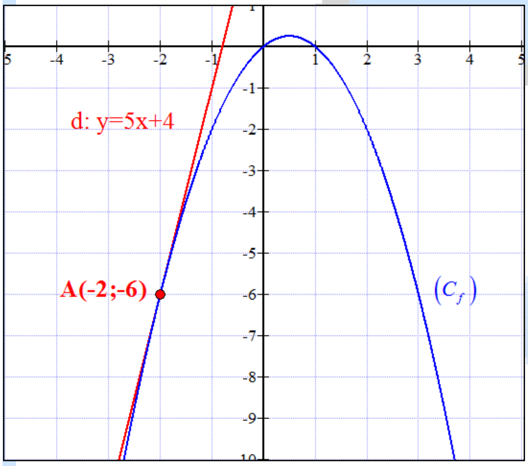
❖ $f(-2)=(-2)-(-2)^2=(-2)-4=-6$.

❖ $\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\dfrac{(-2+h)-(-2+h)^2-(-6)}{h}=\dfrac{-2+h-4+4h-h^2+6}{h}$

$=\dfrac{-h^2+5h}{h}=\dfrac{h(5-h)}{h}$

ومنه فإن: $\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=5-h$.

❖ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0} 5-h=5.$



نستنتج إذن أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند (-2) و $f'(-2)=5$.

2) يمكن التأكد من النتائج المتحصل عليها برسم التمثيل البياني للدالة f، والمستقيم d الذي معامل توجيهه 5 ويشمل النقطة من (C_f) التي فاصلتها (-2)، $(d: y=5x+4)$.

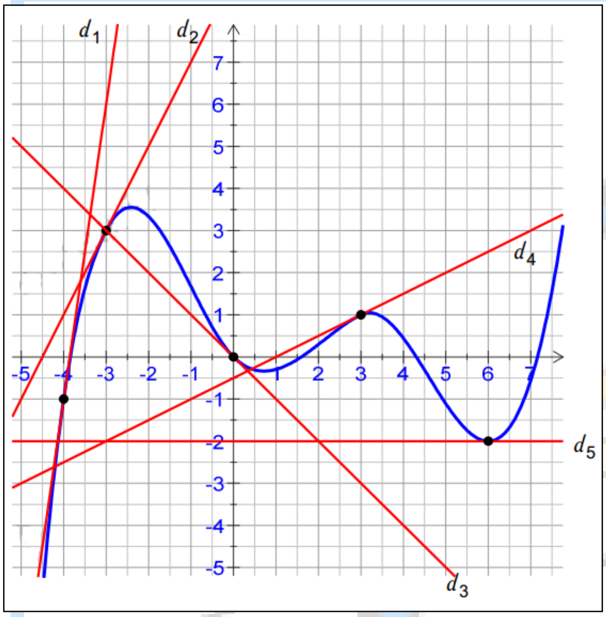
الشكل المقابل يمثل (C_f) والمستقيم d.

حل التمرين 4:

من خلال الشكل الموالي نلاحظ أن:

❖ التمثيل البياني للدالة f يشمل النقاط التالية: $(-4;-1)$، $(-3;3)$، $(0;0)$، $(3;1)$ و $(6;-2)$. ومنه فإن:

$f(-4)=-1$ ، $f(-3)=3$ ، $f(0)=0$ ، $f(3)=1$ و $f(6)=-2$.



❖ المستقيم d_1 يشمل النقطتين $(-4;-1)$ و $(-3;6)$:

- d_1 يشمل النقطة $(-4;-1)$ يعني: $-4a+b=-1$ (1).
- d_1 يشمل النقطة $(-3;6)$ يعني: $-3a+b=6$ (2).
- بطرح (1) من (2) نستنتج أن $a=7$.

❖ معـاملات توجيه المستقيمات d_1 ; d_2 ; d_3 ; d_4 ; d_5 هـي علـى الترتيـب: $m_1=7$ ، $m_2=2$ ، $m_3=-1$ ، $m_4=\frac{1}{2}$ ، $m_5=0$. ومنه فإن:

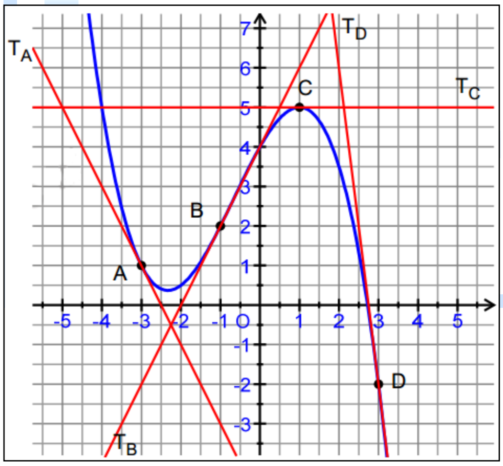
$f'(-4)=7$ ، $f'(-3)=2$ ، $f'(0)=-1$ ، $f'(3)=\frac{1}{2}$ و $f'(6)=0$.

حل التمرين 5:

من خلال الشكل الموالي نلاحظ أن:

1) إحداثيات النقطة A هي $(-3;1)$ ومنه فإن: $f(-3)=1$. إحداثيات النقطة B هي $(-1;2)$ ومنه فإن: $f(-1)=2$.

2) معامل توجيه المماس T_A لـ (C_f) عند النقطة A هو (-3) لأن $f'(-3)=-2$ ، ومعامل توجيه المماس T_B لـ (C_f) عند النقطة B هو 2 لأن $f'(-1)=2$. (أنظر الشكل)



3) نستطيع إكمال رسم (C_f) علما أن:

❖ $f(1)=5$ أي أن (C_f) يشمل النقطة $C(1;5)$.

❖ $f'(1)=0$ أي أن معامـل توجيـه المماس T_C لـ (C_f) عند النقطة C هو 0، أي أنه مواز لمحور الفواصل.

❖ $f(3)=-2$ أي أن (C_f) يشمل النقطة $D(3;-2)$.

❖ $f'(3)=-8$ أي أن معامـل توجيـه المماس T_D لـ (C_f) عند النقطة D هو (-8).

حل التمرين 6:

الدالة f معرفة بما يلي:

$$f(-2)=1 \qquad f(0)=\frac{1}{2} \qquad f(2)=2 \qquad f(5)=1$$

ومنه فإن: (C_f) التمثيل البياني للدالة f يشمل النقاط:

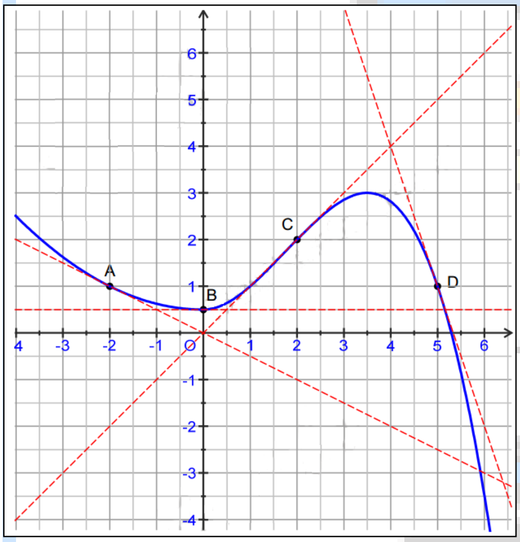
$$A(-2;1) \qquad B\left(0;\frac{1}{2}\right) \qquad C(2;2) \qquad D(5;1)$$

ولدينا:

$$f'(-2)=-\frac{1}{2} \qquad f'(0)=0 \qquad f'(2)=1 \qquad f'(5)=-3$$

ومنه فإن المماسات لـ (C_f) عند النقاط A، B، C و D لها معاملات توجيه على الترتيب $\left(-\frac{1}{2}\right)$; 0 ; 1 ; (-3).

الشكل المقابل يمثل (C_f) و هو يثبت النتائج المتحصل عليها.



حل التمرين 7:

1) الدالة f معرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{x}$.

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\frac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h}=\frac{\left(\sqrt{3+h}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3+h}+\sqrt{3}\right)}{h\left(\sqrt{3+h}+\sqrt{3}\right)}$$

$$=\frac{3+h-3}{h\left(\sqrt{3+h}+\sqrt{3}\right)}=\frac{h}{h\left(\sqrt{3+h}+\sqrt{3}\right)}=\frac{1}{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}}$$

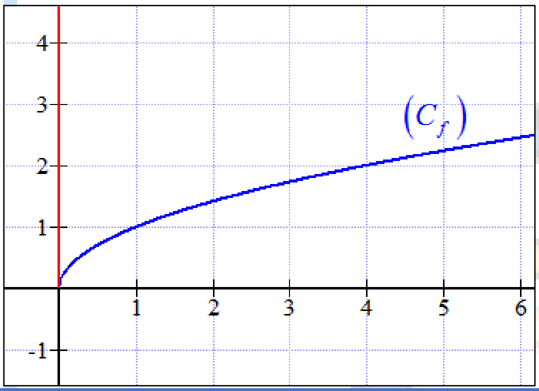
2) $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$. ومنه نستنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 3 و $f'(3)=\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

3) لدينا: $a\in[0;+\infty[$ ، ومنه فإن:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}=\frac{\left(\sqrt{a+h}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}$$

$$=\frac{a+h-a}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}=\frac{h}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}=\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$ مع شرط $a\neq 0$



ومنه نستنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $a\neq 0$، و $f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}$.

4) الشكل الموالي يمثل (C_f) التمثيل البياني للدالة f. نلاحظ أن المماس لـ (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0 عمودي.

حل التمرين 8:

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=3x-5$.

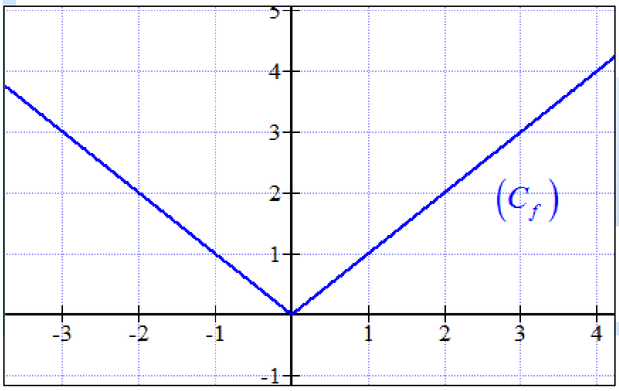
لدينا: $x_0\in\mathbb{R}$ ومنه فإن:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{3(x_0+h)-5-(3x_0-5)}{h}=\frac{3x_0+3h-5-3x_0+5}{h}=\frac{3h}{h}=3$$

أي أنه عندما يؤول h إلى 0 فإن: $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ يؤول إلى 3.

نستنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 و $f'(x_0)=3$.

حل التمرين 9:



الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=|x|$.

لدينا: $f(x)=x$ عندما $x\geq 0$

و $f(x)=-x$ عندما $x<0$.

1) الشكل المقابل يمثل (C_f) التمثيل البياني للدالة f، و هو متكون من نصفي مستقيم معادلتهما على الترتيب $y=x$ عندما $x\geq 0$، و $y=-x$ عندما $x<0$.

2) ليكن $x_0\in\mathbb{R}$، لنحسب $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

❖ عندما يكون $x_0 \in]0;+\infty[$ و h صغير بالقدر الكافي ليكون $x_0+h \in]0;+\infty[$ يكون لدينا:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{|x_0+h|-|x_0|}{h}=\frac{x_0+h-x_0}{h}=\frac{h}{h}=1$$

ومنه فإن: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=1$ أي أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 و $f'(x_0)=1$.(1)

❖ عندما يكون $x_0 \in]-\infty;0[$ و h صغير بالقدر الكافي ليكون $x_0+h \in]-\infty;0[$ يكون لدينا:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{|x_0+h|-|x_0|}{h}=\frac{-(x_0+h)-(-x_0)}{h}=\frac{-x_0-h+x_0}{h}=\frac{-h}{h}=-1$$

ومنه فإن: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=-1$ أي أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 و $f'(x_0)=-1$.(2)

❖ عندما يكون $x_0=0$:

- من أجل $h>0$ لدينا:

$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{|h|-0}{h}=\frac{h}{h}=1$ ، أي $\lim\limits_{h\xrightarrow{>}0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=1$.

- من أجل $h<0$ لدينا:

$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{|h|-0}{h}=\frac{-h}{h}=-1$ ، أي $\lim\limits_{h\xrightarrow{<}0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=-1$.

- بما أن النهايات مختلفة من أجل $h>0$ و $h<0$ ، فإن: الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$.(3)

❖ من (1)، (2) و(3) نستنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق من أجل كل $x_0 \neq 0$ ، ولدينا:

- $f'(x_0)=1$ عندما يكون $x_0>0$ ،
- $f'(x_0)=-1$ عندما يكون $x_0<0$.

حل التمرين 10:

1) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=k$ مع $k\in\mathbb{R}$.

من أجل كل عدد حقيقي a لدينا: $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{k-k}{h}=0$ أي أن: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=0$.

ومنه فإن: الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x)=0$.

2) الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x$.

من أجل كل عدد حقيقي a لدينا: $\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=\frac{a+h-a}{h}=\frac{h}{h}=1$

أي أن: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=1$.

ومنه فإن: الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $g'(x)=1$.

3) الدالة t معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $t(x)=mx+p$ مع $m\in\mathbb{R}$ و $p\in\mathbb{R}$.

من أجل كل عدد حقيقي a لدينا:

$$\frac{t(a+h)-t(a)}{h}=\frac{m(a+h)+p-(ma+p)}{h}=\frac{ma+mh+p-ma-p}{h}=\frac{mh}{h}=m$$

أي أن: $\lim_{h\to 0}\frac{t(a+h)-t(a)}{h}=m$.

ومنه فإن: الدالة t قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $t'(x)=m$.

حل التمرين 11:

1) $f(x)=x^2+5x$.

- الدالة u المعرفة بـ: $u(x)=x^2$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة معرفة بـ: $u'(x)=2x$.
- الدالة v المعرفة بـ: $v(x)=5x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة معرفة بـ: $v'(x)=5$.
- نعلم أن الدالة $u+v$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأن دالتها المشتقة هي: $(u+v)'=u'+v'$.
- نستنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا: $f'(x)=2x+5$.

2) $f(x)=2x+\frac{1}{x}$.

- الدالة u المعرفة بـ: $u(x)=2x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة معرفة بـ: $u'(x)=2$.
- الدالة v المعرفة بـ: $v(x)=\frac{1}{x}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ودالتها المشتقة معرفة بـ: $v'(x)=-\frac{1}{x^2}$.
- نعلم أن الدالة $u+v$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ وأن دالتها المشتقة هي: $(u+v)'=u'+v'$.
- نستنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$، ولدينا: $f'(x)=2-\frac{1}{x^2}$.

بنفس الطريقة نكمل حل ما تبقى من التمرين:

3) $f(x)=x^2-x$. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا: $f'(x)=2x-1$.

4) $f(x)=x^3+3x+1$. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا: $f'(x)=3x^2+3$.

5) $f(x)=-2x+1$. الدالة f هي دالة تآلفية فهي إذن قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا: $f'(x)=-2$.

6) $f(x)=\frac{3x+1}{2}$. نلاحظ أنه يمكن كتابة $f(x)=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$. الدالة f هي دالة تآلفية فهي إذن قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا: $f'(x)=\frac{3}{2}$.

حل التمرين 12:

1) $f(x)=x^4-2x-3$. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا: $f'(x)=4x^3-2$.

2) $f(x)=\frac{1}{x}-5$.

❖ الدالة u المعرفة بـ: $u(x)=\frac{1}{x}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ودالتها المشتقة معرفة بـ: $u'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

❖ الدالة v المعرفة بـ: $v(x)=-5$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة معرفة بـ: $v'(x)=0$.

❖ نعلم أن الدالة $u+v$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ وأن دالتها المشتقة هي: $(u+v)'=u'+v'$.

❖ نستنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ، ولدينا: $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

3) $f(x)=\frac{3-2x}{5}$. نلاحظ أنه يمكن كتابة $f(x)=-\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}$. الدالة f هي دالة تآلفية فهي إذن قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا: $f'(x)=-\frac{2}{5}$.

4) $f(x)=x^5+x^4$. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا: $f'(x)=5x^4+4x^3$.

5) $f(x)=x^3-2x-1$. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا: $f'(x)=3x^2-2$.

6) $f(x)=1-3x+\sqrt{x}$.

❖ الدالة u المعرفة بـ: $u(x)=1-3x$ هي دالة تآلفية فهي إذن قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي: $u'(x)=-3$.

❖ الدالة v المعرفة بـ: $v(x)=\sqrt{x}$ هي الدالة "جذر مربع" فهي إذن قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي: $v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

❖ نعلم أن الدالة $u+v$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ وأن دالتها المشتقة هي: $(u+v)'=u'+v'$.

❖ نستنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ، ولدينا: $f'(x)=-3+\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

حل التمرين 13:

1) $f(x)=3\sqrt{x}$.

❖ الدالة u المعرفة بـ: $u(x)=\sqrt{x}$ هي الدالة "جذر مربع" فهي إذن قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي: $u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

❖ لدينا: $f(x)=k\times u(x)$ حيث: k ثابت حقيقي $(k=3)$ ، ومنه فإن:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي: $f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{x}}$ من أجل كل $x\in]0;+\infty[$.

2) $f(x)=\frac{2}{x}$.

❖ الدالة u المعرفة بـ: $u(x)=\frac{1}{x}$ هي الدالة "مقلوب" فهي إذن قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ودالتها المشتقة هي: $u'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

❖ لدينا: $f(x)=k\times u(x)$ حيث: k ثابت حقيقي $(k=2)$، ومنه فإن: الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ودالتها المشتقة هي: $f'(x)=-\frac{2}{x^2}$ من أجل كل $x\neq 0$.

3) $f(x)=5x^5-3x^2$.

❖ الدالة $x\to x^n$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي: $(x^n)'=nx^{n-1}$. ومنه فإن: $(x^5)'=5x^4$ و $(x^2)'=2x$.

❖ لدينا: $u(x)=k\times x^n$ حيث: k ثابت حقيقي، ومنه فإن u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي: $u'(x)=k\times(x^n)'$. ومنه فإن: $(5x^5)'=25x^4$ و $(-3x^2)'=-6x$.

❖ نستنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا: $f'(x)=25x^4-6x$.

4) $f(x)=(2x^2-1)(4x^3+1)$.

❖ نضع $u(x)=2x^2-1$ و $v(x)=4x^3+1$. لدينا إذن: $f(x)=u(x)\times v(x)$.

❖ الدالتان u و v قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا: $u'(x)=4x$ و $v'(x)=12x^2$.

❖ باستعمال مشتقة جداء: $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$ يصبح لدينا:

$$f'(x)=4x(4x^3+1)+(2x^2-1)\times 12x^2=16x^4+4x+24x^4-12x^2$$

❖ نستنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا: $f'(x)=40x^4-12x^2+4x$.

ملاحظة: يمكن نشر عبارة $f(x)=(2x^2-1)(4x^3+1)$ فنتحصل على: $f(x)=8x^5-4x^3+2x^2-1$ ثم حساب المشتقة فنتحصل على نفس النتيجة.

5) $f(x)=x^2\sqrt{x}$.

❖ نضع $u(x)=x^2$ و $v(x)=\sqrt{x}$. لدينا إذن: $f(x)=u(x)\times v(x)$.

❖ الدالة u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا: $u'(x)=2x$.

❖ الدالة v قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و $v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

❖ باستعمال مشتقة جداء: $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$ يصبح لدينا: $f'(x)=2x\times\sqrt{x}+x^2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

❖ نلاحظ أن $x=\left(\sqrt{x}\right)^2$ ومنه يمكن اختزال عبارة $f'(x)$ ، فنتحصل على:

$$f'(x)=2x\sqrt{x}+x\times\left(\sqrt{x}\right)^2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=2x\sqrt{x}+\frac{1}{2}x\sqrt{x}=\frac{5}{2}x\sqrt{x}\ .$$

❖ نستنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ، ولدينا: $f'(x)=\frac{5}{2}x\sqrt{x}$.

6) $f(x)=(2x+1)\times\frac{1}{x}$.

الطريقة 1:

❖ من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ ، لدينا: $f(x)=2x\times\frac{1}{x}+1\times\frac{1}{x}=2+\frac{1}{x}$.

❖ باستعمال مشتقة مجموع يصبح لدينا: $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

الطريقة 2:

❖ لنضع $u(x)=2x+1$ و $v(x)=\frac{1}{x}$. لدينا إذن: $f(x)=u(x)\times v(x)$.

❖ الدالة u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا: $u'(x)=2$.

❖ الدالة v قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و $v'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

❖ باستعمال مشتقة جداء: $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$ يصبح لدينا:

$$f'(x)=2\times\frac{1}{x}+(2x+1)\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{2}{x}-\frac{2x}{x^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{2}{x}-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}$$

❖ من خلال الطريقتين، نستنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ، ولدينا: $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

حل التمرين 14:

1) $f(x)=-7x^2+5\sqrt{x}$.

❖ لنضع $u(x)=-7x^2$ و $v(x)=5\sqrt{x}$. لدينا إذن: $f(x)=u(x)+v(x)$.

❖ الدالة u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا: $u'(x)=-7\times 2x=-14x$.

❖ الدالة v قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و $v'(x)=5\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{5}{2\sqrt{x}}$.

❖ باستعمال مشتقة مجموع: $(u+v)'=u'+v'$ يصبح لدينا:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ، ولدينا: $f'(x)=-14x+\dfrac{5}{2\sqrt{x}}$.

2) $f(x)=8x^4-7x^3+3x^2-\dfrac{7}{x}$.

❖ لنضع $u(x)=8x^4-7x^3+3x^2$ و $v(x)=-\dfrac{7}{x}$. لدينا إذن: $f(x)=u(x)+v(x)$.

❖ الدالة u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا: $u'(x)=8\times 4x^3-7\times 3x^2+3\times 2x=32x^3-21x^2+6x$.

❖ الدالة v قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و $v'(x)=-7\times\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{7}{x^2}$.

❖ باستعمال مشتقة مجموع: $(u+v)'=u'+v'$ يصبح لدينا: الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ، ولدينا:
$f'(x)=32x^3-21x^2+6x+\dfrac{7}{x^2}$.

3) $f(x)=8\sqrt{x}+\dfrac{3}{x}$.

❖ لنضع $u(x)=8\sqrt{x}$ و $v(x)=\dfrac{3}{x}$. لدينا إذن: $f(x)=u(x)+v(x)$.

❖ الدالة u قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ، ولدينا: $u'(x)=8\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{4}{\sqrt{x}}$.

❖ الدالة v قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و $v'(x)=3\times\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\dfrac{3}{x^2}$.

❖ باستعمال مشتقة مجموع، يصبح لدينا:
الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ، ولدينا: $f'(x)=\dfrac{4}{\sqrt{x}}-\dfrac{3}{x^2}$.

4) $f(x)=(-3x-5)(x^2+3x+7)$.

❖ لنضع $u(x)=-3x-5$ و $v(x)=x^2+3x+7$. لدينا إذن: $f(x)=u(x)\times v(x)$.

❖ الدالتان u و v قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا: $u'(x)=-3$ و $v'(x)=2x+3$.

❖ باستعمال مشتقة جداء: $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$ يصبح لدينا:

$$f'(x)=-3(x^2+3x+7)+(-3x-5)(2x+3)=-3x^2-9x-21-6x^2-9x-10x-15$$
$$=-9x^2-28x-36$$

❖ نستنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا: $f'(x)=-9x^2-28x-36$.

ملاحظة: يمكن نشر عبارة $f(x)$ ، ثم حساب المشتقة، فنتحصل على نفس النتيجة.

حل التمرين 15:

1) $f(x)=6\sqrt{x}-5x^3$.

❖ لنضع $u(x)=6\sqrt{x}$ و $v(x)=-5x^3$. لدينا إذن: $f(x)=u(x)+v(x)$.

❖ الدالة u قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ، ولدينا: $u'(x)=6\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{3}{\sqrt{x}}$.

❖ الدالة v قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $v'(x)=-5\times 3x^2=-15x^2$.

❖ باستعمال مشتقة مجموع، يصبح لدينا:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ، ولدينا: $f'(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}-15x^2$.

2) $f(x)=\sqrt{x}\times\frac{1}{x}$.

❖ لنضع $u(x)=\sqrt{x}$ و $v(x)=\frac{1}{x}$. لدينا إذن: $f(x)=u(x)\times v(x)$.

❖ الدالة u قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ، ولدينا: $u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

❖ الدالة v قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ولدينا: $v'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

❖ باستعمال مشتقة جداء: $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$ يصبح لدينا:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{x}\right)+\sqrt{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{2x\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{x^2}.$$

❖ نلاحظ أن $x=\left(\sqrt{x}\right)^2$ ومنه يمكن اختزال عبارة $f'(x)$ ، فنتحصل على:

$$f'(x)=\frac{1}{2x\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{x\left(\sqrt{x}\right)^2}=\frac{1}{2x\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}=\frac{1}{2x\sqrt{x}}-\frac{2}{2x\sqrt{x}}=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

❖ نستنتج أن: الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ، ولدينا: $f'(x)=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$.

3) $f(x)=\left(\sqrt{x}+1\right)\left(5x^2+3x+7\right)$.

❖ لنضع $u(x)=\sqrt{x}+1$ و $v(x)=5x^2+3x+7$. لدينا إذن: $f(x)=u(x)\times v(x)$.

❖ الدالة u قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ، ولدينا: $u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

❖ الدالة v قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $v'(x)=10x+3$.

❖ باستعمال مشتقة جداء: $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$ يصبح لدينا:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(5x^2+3x+7\right)+\left(\sqrt{x}+1\right)(10x+3)=\frac{5x^2+3x+7}{2\sqrt{x}}+\left(\sqrt{x}+1\right)(10x+3)$$

❖ نستنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ، ولدينا:

$$f'(x)=\frac{5x^2+3x+7}{2\sqrt{x}}+\left(\sqrt{x}+1\right)(10x+3)$$

4) $f(x)=\left(x^2-2x-1\right)^2$.

❖ لنضع $u(x)=x^2-2x-1$. لدينا إذن: $f(x)=\left[u(x)\right]^2$.

❖ الدالة u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا: $u'(x)=2x-2$.

❖ باستعمال مشتقة $\left[u(x)\right]^n$: $(u^n)'=n\times u'\times u^{n-1}$ يصبح لدينا:

$$f'(x)=2(2x-2)\left(x^2-2x-1\right)=4(x-1)\left(x^2-2x-1\right)$$

❖ نستنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا:

$f'(x)=4(x-1)\left(x^2-2x-1\right)$ ، أو $f'(x)=4\left(x^3-3x^2+x+1\right)$.

حل التمرين 16:

1) $f(x)=\frac{1}{2x+1}$.

❖ لنضع $u(x)=2x+1$. لدينا إذن: $f(x)=\frac{1}{u(x)}$.

❖ الدالة u تنعدم من أجل $x=-\frac{1}{2}$ وهي قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا: $u'(x)=2$.

❖ باستعمال مشتقة: $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$ يصبح لدينا: $f'(x)=-\frac{2}{(2x+1)^2}$

❖ نستنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ ، ولدينا: $f'(x)=-\frac{2}{(2x+1)^2}$.

2) $f(x)=\frac{1}{x^2}$.

❖ لنضع $u(x)=x^2$. لدينا إذن: $f(x)=\frac{1}{u(x)}$.

❖ الدالة u تنعدم من أجل $x=0$ وهي قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا: $u'(x)=2x$.

❖ باستعمال مشتقة: $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ يصبح لدينا: $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2)^2} = -\frac{2}{x^3}$

❖ نستنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$، ولدينا: $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$.

3) $f(x) = \frac{1}{3-5x}$.

❖ لنضع $u(x) = 3-5x$. لدينا إذن: $f(x) = \frac{1}{u(x)}$.

❖ الدالة u تنعدم من أجل $x = \frac{3}{5}$ و هي قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا: $u'(x) = -5$.

❖ باستعمال مشتقة: $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ يصبح لدينا: $f'(x) = -\frac{-5}{(3-5x)^2} = \frac{5}{(3-5x)^2}$

❖ نستنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{5}\right\}$، ولدينا: $f'(x) = \frac{5}{(3-5x)^2}$.

4) $f(x) = \frac{2}{x^2+x} = 2 \times \frac{1}{x^2+x}$.

❖ لنضع $u(x) = x^2+x$. لدينا إذن: $f(x) = 2 \times \frac{1}{u(x)}$.

❖ لدينا: $u(x) = x^2+x = x(x+1)$ ومنه فإن: الدالة u تنعدم من أجل $x=0$ و $x=(-1)$. و هي قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا: $u'(x) = 2x+1$.

❖ باستعمال مشتقة: $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ يصبح لدينا: $f'(x) = 2\left(-\frac{2x+1}{(x^2+x)^2}\right) = -\frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}$

❖ نستنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} \setminus \{-1;0\}$، ولدينا: $f'(x) = -\frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}$.

5) $f(x) = -\frac{3}{2x-6} = -3 \times \frac{1}{2x-6}$.

❖ لنضع $u(x) = 2x-6$. لدينا إذن: $f(x) = (-3) \times \frac{1}{u(x)}$.

❖ الدالة u تنعدم من أجل $x = 3$، و هي قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا: $u'(x) = 2$.

❖ باستعمال مشتقة: $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ يصبح لدينا:

$$f'(x)=-3\left(-\frac{2}{(2x-6)^2}\right)=\frac{6}{(2x-6)^2}=\frac{6}{2^2(x-3)^2}=\frac{3}{2(x-3)^2}$$

❖ نستنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}\setminus\{3\}$، ولدينا: $f'(x)=\frac{3}{2(x-3)^2}$.

6) $f(x)=\frac{5}{x^3}=5\times\frac{1}{x^3}$.

❖ لنضع $u(x)=x^3$. لدينا إذن: $f(x)=5\times\frac{1}{u(x)}$.

❖ الدالة u تنعدم من أجل $x=0$ ، وهي قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا: $u'(x)=3x^2$.

❖ باستعمال مشتقة: $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$ يصبح لدينا: $f'(x)=5\left(-\frac{3x^2}{(x^3)^2}\right)=-\frac{15x^2}{x^6}=-\frac{15}{x^4}$.

❖ نستنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$، ولدينا: $f'(x)=-\frac{15}{x^4}$.

7) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$.

❖ لنضع $u(x)=x^2+1$. لدينا إذن: $f(x)=\frac{1}{u(x)}$.

❖ الدالة u لا تنعدم، وهي قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا: $u'(x)=2x$.

❖ باستعمال مشتقة: $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$ يصبح لدينا: $f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$.

❖ نستنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا: $f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$.

8) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

❖ لنضع $u(x)=\sqrt{x}$. لدينا إذن: $f(x)=\frac{1}{u(x)}$.

❖ الدالة u تنعدم من أجل $x=0$ ، وهي قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$، ولدينا: $u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

❖ باستعمال مشتقة: $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$ يصبح لدينا:

$$. f'(x)=-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=-\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\frac{1}{x}=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

❖ نستنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ، ولدينا: $f'(x)=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$.

حل التمرين 17:

1) $f(x)=\frac{x+2}{2x-3}$.

❖ الدالة f هي دالة ناطقة، مقامها $2x-3$ ينعدم من أجل $x=\frac{3}{2}$.

❖ لنضع $u(x)=x+2$ و $v(x)=2x-3$. لدينا إذن: $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ مع شرط $v(x)\neq 0$.

❖ الدالة u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا: $u'(x)=1$.

❖ الدالة v قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $v'(x)=2$.

❖ باستعمال مشتقة حاصل قسمة: $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$ يصبح لدينا:

$$f'(x)=\frac{1\times(2x-3)-(x+2)\times 2}{(2x-3)^2}=\frac{2x-3-2x-4}{(2x-3)^2}=\frac{-7}{(2x-3)^2}$$

❖ نستنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$ ، ولدينا: $f'(x)=-\frac{7}{(2x-3)^2}$.

بنفس الطريقة نكمل ما تبقى من التمرين:

2) $f(x)=\frac{2+3x}{x^2+1}$. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا: $f'(x)=\frac{-3x^2-4x+3}{(x^2+1)^2}$.

3) $f(x)=\frac{x^2}{x-2}$. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ ، ولدينا: $f'(x)=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$.

4) $f(x)=\frac{x+1}{2x^2+3}$. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا: $f'(x)=\frac{-2x^2-4x+3}{(2x^2+3)^2}$.

5) $f(x)=-\frac{3-5x}{x-1}$. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ ، ولدينا: $f'(x)=\frac{2}{(x-1)^2}$.

6) $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+3x}$. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}\setminus\{-3;0\}$ ، ولدينا: $f'(x)=\frac{-2x^2-2x-3}{(x^2+3x)^2}$.

7) $f(x)=\frac{3x^2-1}{3x^2+1}$. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا: $f'(x)=\frac{12x}{(3x^2+1)^2}$.

8) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$. الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ، ولدينا: $f'(x)=\frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$.

حل التمرين 18:

1) $f(x)=x^3-3x^2+2x-5$. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا: $f'(x)=3x^2-6x+2$.

2) $g(x)=\frac{x^2-3x+1}{5}=\frac{1}{5}x^2-\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}$. الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا: $g'(x)=\frac{2x-3}{5}$.

3) $h(x)=2+\frac{1}{x}$. الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ، ولدينا: $h'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

4) $p(x)=\frac{1}{2}x^4-x^3+\frac{5}{3}x$. الدالة p قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا: $p'(x)=2x^3-3x^2+\frac{5}{3}$.

5) $q(x)=x+\frac{1}{2}\sqrt{x}$. الدالة q قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ، ولدينا: $q'(x)=1+\frac{1}{4\sqrt{x}}$.

6) $r(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}$. الدالة r قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا: $r'(x)=x^3-2x^2$.

حل التمرين 19:

1) $f(x)=\frac{3}{2x}$. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ، ولدينا: $f'(x)=-\frac{3}{2x^2}$.

2) $g(x)=\frac{x+1}{x-3}$. الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ ، ولدينا: $g'(x)=-\frac{4}{(x-3)^2}$.

3) $h(x)=\frac{x^2+x-1}{x^2+x+1}$.

الدالة h دالة ناطقة، مقامها x^2+x+1 ثلاثي حدود لا ينعدم لأن مميزه سالب، ومنه فإن: الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا: $h'(x)=\frac{2(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$.

4) $p(x)=(x-3)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$.

❖ $p'(x)=1\times\left(1+\frac{1}{x^2}\right)+(x-3)\times\left(-\frac{2x}{x^4}\right)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{2x}{x^3}+\frac{6}{x^3}$.

❖ الدالة p قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ، ولدينا: $p'(x)=1-\frac{1}{x^2}+\frac{6}{x^3}$.

5) $q(x)=(x^2-3)\sqrt{x}$.

❖ $q'(x)=2x\times\sqrt{x}+(x^2-3)\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{2x\sqrt{x}\times2\sqrt{x}+x^2-3}{2\sqrt{x}}=\dfrac{4x^2+x^2-3}{2\sqrt{x}}$

❖ الدالة q قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ، ولدينا: $q'(x)=\dfrac{5x^2-3}{2\sqrt{x}}$.

6) $r(x)=(2x+1)^2$.

❖ لنضع $u(x)=2x+1$. لدينا إذن: $r(x)=[u(x)]^n$.

❖ الدالة u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا: $u'(x)=2$.

❖ باستعمال مشتقة: $\left([u(x)]^n\right)'=n\times u'\times[u(x)]^{n-1}$ يصبح لدينا: $r'(x)=2\times2\times(2x+1)$

❖ الدالة r قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا: $r'(x)=4(2x+1)$.

حل التمرين 20:

الدالة f معرفة بـ: $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$. و (C_f) تمثيلها البياني.

الدالة f دالة ناطقة، مقامها ينعدم من أجل $x=1$. ومنه فإن: الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

❖ لنضع $u(x)=x^2+1$ و $v(x)=x-1$. لدينا إذن: $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ مع شرط $v(x)\neq0$.

❖ الدالة u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا: $u'(x)=2x$.

❖ الدالة v قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $v'(x)=1$.

❖ باستعمال مشتقة حاصل قسمة: $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$ يصبح لدينا:

$$f'(x)=\frac{2x\times(x-1)-(x^2+1)\times1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$

1) نعلم أن معامل توجيه مماس (C_f) عند النقطة التي فاصلتها x هو $f'(x)$. ونعلم أنه لكي يكون مماس (C_f) عند النقطة التي فاصلتها x موازيا للمستقيم d الذي معادلته: $y=-x+1$ ، يجب أن يكون لهما نفس معامل التوجيه ومنه فإن: $f'(x)=-1$.

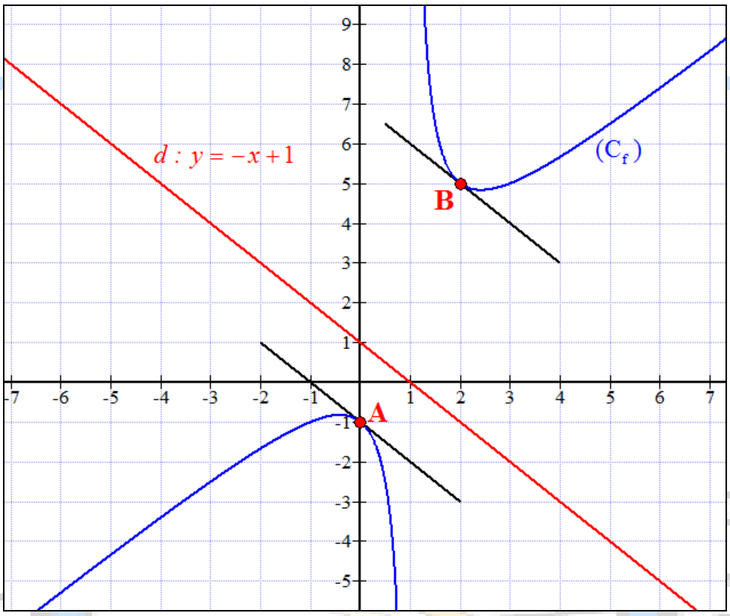
$$f'(x)=-1\Leftrightarrow\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}=-1\Leftrightarrow x^2-2x-1=-(x-1)^2\Leftrightarrow x^2-2x-1=-x^2+2x-1$$

$$\Leftrightarrow2x^2-4x=0\Leftrightarrow2x(x-2)=0$$

أي $x=0$ أو $x=2$.

بما أن 0 و 2 ينتميان لـ $\mathbb{R}\setminus\{1\}$، فإن: (C_f) يقبل مماسين موازيين للمستقيم d الذي معادلته: $y=-x+1$ في النقطتين $A(0;-1)$ و $B(2;5)$.

2) الشكل الموالي يمثل (C_f) والمستقيم d، وهو يثبت صحة النتائج المتحصل عليها.



حل التمرين 21:

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=3x^2+2x-5$.

1) الدالة f هي ثلاثي حدود، وبما أن $a=3>0$ و $-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2\times 3}=-\frac{1}{3}$، فإن: الدالة f متناقصة على $\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right]$ ومتزايدة على $\left[-\frac{1}{3};+\infty\right[$.

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2+2\times\left(-\frac{1}{3}\right)-5=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}-\frac{15}{3}=-\frac{16}{3}$$

ومنه فإن: الدالة f تقبل عند $-\frac{1}{3}$ قيمة حدية صغرى هي $-\frac{16}{3}$.

2) $f(x)=3x^2+2x-5$

ومنه فإن: $f'(x)=6x+2=2(3x+1)$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\frac{16}{3}$	↗ $+\infty$

من خلال جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أن الدالة f تقبل عند $-\frac{1}{3}$ قيمة حدية صغرى هي $-\frac{16}{3}$.

حل التمرين 22:

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x^3+3x^2-12x+7$.

1) $f'(x)=6x^2+6x-12$ أي $f'(x)=6(x^2+x-2)$.

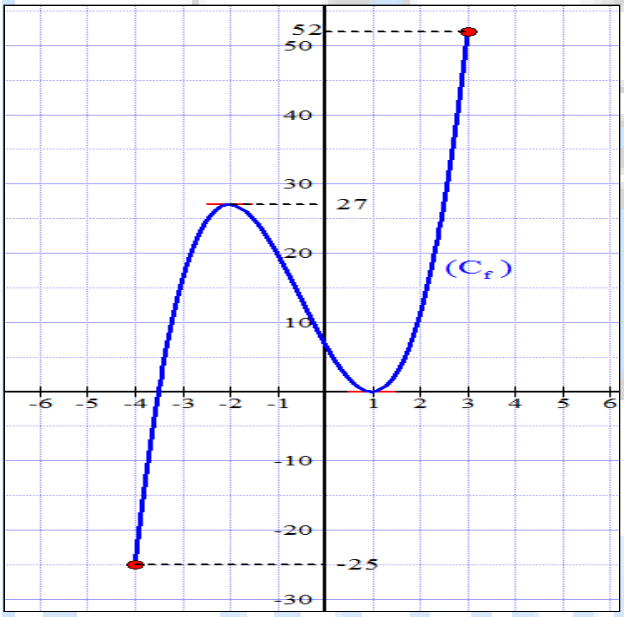
❖ x^2+x-2 هو ثلاثي حدود مميزه $\Delta=9>0$ ، ومنه فإن: جذراه هما $x_1=-2$ و $x_2=1$. وبما أن $a=1>0$ ، فإن:

- $f'(x)=0$ عندما $x=-2$ أو $x=1$.
- $f'(x)>0$ عندما $x\in\left]-\infty;-2\right[\cup\left]1;+\infty\right[$.
- $f'(x)<0$ عندما $x\in\left]-2;1\right[$.

❖ نستنتج أن الدالة f متزايدة على $\left]-\infty;-2\right[$ ، متناقصة على $\left]-2;1\right[$ و متزايدة على $\left]1;+\infty\right[$.

2) جدول تغيرات الدالة f في المجال $[-4;3]$ ، يكون كالتالي:

x	-4		-2		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	-25	↗	27	↘	0	↗	52



3) الشكل المقابل يمثل الدالة f في المجال $[-4;3]$ ، و هو يثبت صحة النتائج المتحصل عليها.

نلاحظ أن (C_f) يقبل عند النقطتين اللتين فاصلتاهما على الترتيب (-2) و 1 ، مماسين موازيين لمحور الفواصل.

حل التمرين 23:

الدالة f معرفة على $[0;9]$ بـ: $f(x)=\dfrac{5+x}{1+x}$.

1) $f'(x)=\dfrac{1\times(1+x)-1\times(5+x)}{(5+x)^2}$ أي $f'(x)=-\dfrac{4}{(5+x)^2}$.

وبما أن $(5+x)^2>0$ فإن: $f'(x)<0$ من أجل كل $x\in[0;9]$.

2) بما أن $f'(x)<0$ من أجل كل $x\in[0;9]$، فإن: الدالة f متناقصة تماما على المجال $[0;9]$. ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0		9
$f'(x)$		$-$	
f	5	$\searrow$	$\frac{7}{5}$

3) من خلال جدول تغيرات الدالة f، نلاحظ أنه عندما يكون $x\in[0;9]$، فإن $f(x)\in\left[\frac{7}{5};5\right]$. وبما أن $\frac{7}{5}>1$ فإن: المعادلة $f(x)=1$ ليس لها حلول في المجال $[0;9]$.

حل التمرين 24:

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ بـ: $f(x)=ax+b+\frac{16}{x+1}$ حيث: a و b عددان حقيقيان ثابتان. و ليكن (C_f) تمثيلها البياني.

(1

❖ (C_f) يشمل النقطة $A(1;2)$ معناه أن: $f(1)=2$.

$$f(1)=2\Leftrightarrow a\times1+b+\frac{16}{1+1}=2\Leftrightarrow a+b+8=2\Leftrightarrow a+b=-6\ (1)$$

❖ (C_f) يقبل عند النقطة $A(1;2)$ مماسا موازيا لمحور الفواصل، معناه أن: $f'(1)=0$.

❖ نلاحظ أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل التالي: $f(x)=ax+b+16\times\frac{1}{x+1}$.

- $\frac{1}{x+1}$ من الشكل $\frac{1}{u(x)}$ مع $u(x)=x+1$. ومنه فإن مشتقة $\frac{1}{x+1}$ هي:

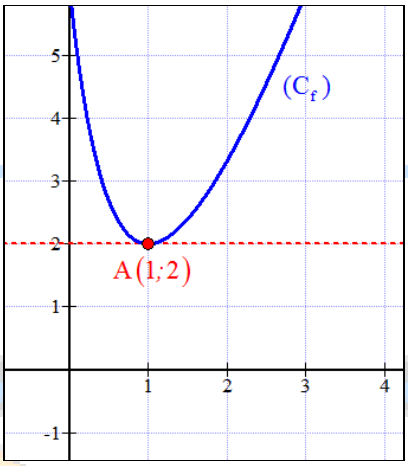
$$\left(\frac{1}{x+1}\right)'=-\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}=-\frac{1}{(x+1)^2}$$

- نستنتج أن: $f'(x)=a+16\times\left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right)$ أي $f'(x)=a-\frac{16}{(x+1)^2}$.

❖ $f'(1)=0\Leftrightarrow a-\frac{16}{(1+1)^2}=0\Leftrightarrow a=\frac{16}{4}$ أي $a=4$.

من (1) لدينا: $a+b=-6$، ومنه فإن: $b=-10$. إذن: $f(x)=4x-10+\frac{16}{x+1}$.

2) الشكل الموالي يمثل (C_f)، النقطة $A(1;2)$، ومماس (C_f) عند النقطة $A(1;2)$. و هو يؤكد النتائج المتحصل عليها.



حل التمرين 25:

الدالة f معرفة على $[-4;2]$ بـ: $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3$. و (C_f) تمثيلها البياني.

1) الدالة f كثير حدود، ومنه فإن الدالة f قابلة للاشتقاق على $[-4;2]$. ولدينا:

$f'(x)=\frac{1}{3}\times 3x^2+2x=x^2+2x$ أي $f'(x)=x(x+2)$.

❖ $f'(x)=0$، معناه $x=0$ أو $x=-2$.

❖ $f'(x)>0$، معناه $x\in[-4;-2[\cup]0;2]$.

❖ $f'(x)<0$، معناه $x\in]-2;0[$.

جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	-4		-2		0		2
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
f	$-\frac{25}{3}$	↗	$-\frac{5}{3}$	↘	-3	↗	$\frac{11}{3}$

2) نعلم أن معادلة مماس (C_f) عند النقطة التي فاصلتها x_0 هي: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

بأخذ $x_0=-1$، يكون لدينا:

❖ $f(-1)=\frac{1}{3}\times(-1)^3+(-1)^2-3=-\frac{1}{3}+1-3=-\frac{7}{3}$. و $f'(-1)=-1(-1+2)=-1$.

❖ لدينا إذن: $y=-1(x+1)-\frac{7}{3}=-x-1-\frac{7}{3}=-x-\frac{10}{3}$

❖ ومنه فإن معادلة T المماس لـ (C_f) عند النقطة التي فاصلتها (-1) هي: $y=-x-\frac{10}{3}$.

3) من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، يمكن كتابة:

$$f(x)-\left(-x-\frac{10}{3}\right)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3+x+\frac{10}{3}=\frac{1}{3}x^3+x^2+x+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\left(x^3+3x^2+3x+1\right)$$

نلاحظ أن (-1) هو جذر لـ x^3+3x^2+3x+1 ومنه يمكن استعمال العامل $(x+1)$ لتحليل كثير الحدود x^3+3x^2+3x+1 ، فنتحصل على: $x^3+3x^2+3x+1=(x+1)\left(ax^2+bx+c\right)$.

$$(x+1)\left(ax^2+bx+c\right)=ax^3+bx^2+cx+ax^2+bx+c=ax^3+(b+a)x^2+(c+b)x+c$$

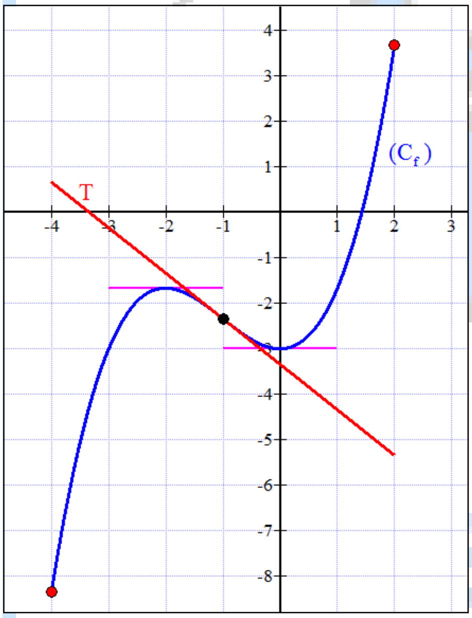
$$x^3+3x^2+3x+1=(x+1)\left(ax^2+bx+c\right)$$

$$\Leftrightarrow x^3+3x^2+3x+1=ax^3+(b+a)x^2+(c+b)x+c$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1\\ b+a=3\\ c+b=3\\ c=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1\\ b=2\\ c=1\end{cases}$$

لدينا إذن: $\frac{1}{3}\left(x^3+3x^2+3x+1\right)=\frac{1}{3}(x+1)\left(x^2+2x+1\right)=\frac{1}{3}(x+1)(x+1)^2$

أي $f(x)-\left(-x-\frac{10}{3}\right)=\frac{1}{3}(x+1)(x+1)^2$. وبما أن $\frac{1}{3}(x+1)^2>0$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ فإن: إشارة $f(x)-\left(-x-\frac{10}{3}\right)$ من إشارة $(x+1)$.



ومنه فإن: $f(x)-\left(-x-\frac{10}{3}\right)\geq 0$ عندما يكون $x\geq -1$ ، (1)

و $f(x)-\left(-x-\frac{10}{3}\right)\leq 0$ عندما يكون $x\leq -1$. (2)

من (1) و (2) نستنتج أن: (C_f) يقع فوق T من أجل $x\in[-1;+\infty[$ ،

و (C_f) يقع تحت T من أجل $x\in]-\infty;-1]$.

4) الشكل المقابل يمثل (C_f) و T . وهو يؤكد صحة النتائج المتحصل عليها.

5) لدينا: $f'(x)=x^2+2x$. x^2+2x هو ثلاثي حدود، ومنه فإن: f' قابلة للاشتقاق على $[-4;2]$ و $f''(x)=2x+2=2(x+1)$.

❖ $f''(x)=0$ عندما $x=-1$ ، $f''(x)>0$ عندما يكون $x>-1$ ، $f''(x)<0$ عندما يكون $x<-1$.

❖ نلاحظ أن $f''(x)$ تنعدم وتغير إشارتها عند (-1) . ومنه فإن النقطة التي فاصلتها (-1) تمثل نقطة انعطاف لـ (C_f) .

حل التمرين 26:

الدالة f معرفة على $[-2;2]$ بـ: $f(x)=x^4-2x^2$.

1) الدالة f كثير حدود، إذن فهي قابلة للاشتقاق على $[-2;2]$. ولدينا:

$$f'(x)=4x^3-4x=4x\left(x^2-1\right)=4x(x-1)(x+1)$$

الجدول الموالي يمثل جدول إشارة $f'(x)$:

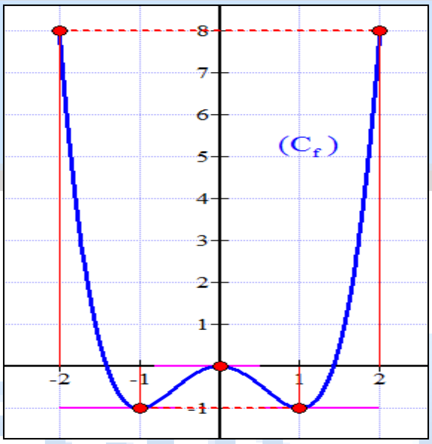
x	-2		-1		0		1		2
$4x$		-		-	0	+		+	+
$x+1$		-	0	+		+		+	+
$x-1$		-		-		-	0	+	+
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	+

لدينا إذن: $f'(x)<0$ عندما يكون $x\in[2;-1[\cup]0;1[$ ، و $f'(x)>0$ عندما يكون $x\in]-1;0[\cup]1;2]$.

2) ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	-2		-1		0		1		2
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	8	↘	-1	↗	0	↘	-1	↗	8

3) الشكل الموالي يمثل (C_f) التمثيل البياني للدالة f، وهو يؤكد النتائج المتحصل عليها.



تمّ بحمد الله وتوفيقه