طرق عملية لحل تمارين الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

1. تحديد مجموعة تعريف $ln(u(x))$:

تكون الدالة $ln(u(x))$ معرفة إذا وفقط إذا كانت $u(x)>0$.

مثال: أوجد مجموعة تعريف الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=ln(4x+3)$.

الحل: الدالة f معرفة إذا وفقط إذا كانت:

$4x+3>0 \Leftrightarrow 4x>-3 \Leftrightarrow x>-\frac{3}{4}$.

ومنه فإن: $D_f=\left]-\frac{3}{4};+\infty\right[$.

2. استعمال الخصائص الجبرية للدالة اللوغاريتمية النيبيرية لتحويل عبارة:

- ❖ اختيار الخاصية الجبرية المراد استعمالها.
- ❖ استعمال الخاصية الجبرية المختارة لتبسيط العبارة.

مثال: لتكن الدالة f المعرفة على $]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=ln\left[(x+2)^2\right]+2ln(x-2)$. بسط عبارة $f(x)$.

الحل:

لتبسيط عبارة $f(x)$ نستعمل الخاصيتين الجبريتين التاليتين:

من أجل كل عددين حقيقيين x و y من $]0;+\infty[$ ، ومن أجل كل عدد نسبي n:

- ❖ $ln(x^n)=n\,ln\,x$.
- ❖ $ln(xy)=ln\,x+ln\,y$.

من أجل كل $x\in]2;+\infty[$ ، لدينا:

$$f(x)=ln\left[(x+2)^2\right]+2ln(x-2)=2ln(x+2)+2ln(x-2)$$
$$=2\left[ln(x+2)+ln(x-2)\right]=2ln\left[(x+2)(x-2)\right]=2ln\left(x^2-4\right)$$

ومنه فإنه من أجل كل $x\in]2;+\infty[$ ، لدينا: $f(x)=2ln\left(x^2-4\right)$.

3. حل معادلة من الشكل $ln(u(x)) = ln(v(x))$:

لحل معادلة من الشكل $ln(u(x)) = ln(v(x))$ يجب:

- ❖ إيجاد مجموعة تعريف المعادلة.
- ❖ نزع اللوغاريتم من طرفي المعادلة وذلك بتطبيق $ln(u(x)) = ln(v(x)) \Leftrightarrow u(x) = v(x)$.
- ❖ حل المعادلة الجديدة.
- ❖ اختيار الحلول التي تنتمي لمجموعة تعريف المعادلة.

مثال: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية: $ln(2x-1) = ln(1-x)$.

الحل:

❖ المعادلة معرفة إذا تحقق الشرطان التاليان: $\begin{cases} 2x-1>0 \\ 1-x>0 \end{cases}$ أي إذا كان $\begin{cases} x > \dfrac{1}{2} \\ x<1 \end{cases}$

ومنه فإن مجموعة تعريف المعادلة $ln(2x-1) = ln(1-x)$ هي: $D = \left]\dfrac{1}{2};1\right[$.

❖ من أجل كل $x \in D$، لدينا:

$$ln(2x-1) = ln(1-x) \Leftrightarrow 2x-1 = 1-x \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

❖ بما أن $\dfrac{2}{3} \in D$، فإن: مجموعة حلول المعادلة $ln(2x-1) = ln(1-x)$ هي: $S = \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$.

4. حل معادلة من الشكل $ln(u(x)) = k$:

لحل معادلة من الشكل $ln(u(x)) = k$ يجب:

- ❖ إيجاد مجموعة تعريف المعادلة.
- ❖ نزع اللوغاريتم من المعادلة وذلك باستعمال الدالة الأسية.
- ❖ حل المعادلة الجديدة.
- ❖ اختيار الحلول التي تنتمي لمجموعة تعريف المعادلة.

مثال: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية: $ln(3x-4) = 3$.

الحل:

❖ المعادلة معرفة إذا تحقق الشرط التالي: $3x-4>0$ أي إذا كان $x > \dfrac{4}{3}$

ومنه فإن مجموعة تعريف المعادلة $ln(3x-4) = 3$ هي: $D = \left]\dfrac{4}{3};+\infty\right[$.

❖ من أجل كل $x \in D$، لدينا:

$$ln(3x-4) = 3 \Leftrightarrow 3x-4 = e^3 \Leftrightarrow x = \frac{e^3+4}{3}$$

❖ بما أن $\frac{e^3+4}{3} \in D$ ، فإن: مجموعة حلول المعادلة $ln(3x-4)=3$ هي: $S=\left\{\frac{e^3+4}{3}\right\}$.

5. حل معادلة من الشكل $a(ln\,x)^2+b\,ln\,x+c=0$:

لحل معادلة من الشكل $a(ln\,x)^2+b\,ln\,x+c=0$ نتبع ما يلي:

❖ نضع $ln\,x=X$ ، ونحل المعادلة $aX^2+bX+c=0$.

❖ نطبق الدالة الأسية على الحلول المتحصل عليها لنزع اللوغاريتم.

مثال: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية: $(ln\,x)^2+2\,ln\,x-8=0$.

الحل: نضع $ln\,x=X$ ومنه نتحصل على: $X^2+2X-8=0$.

❖ $\Delta=36>0 \Rightarrow X_1=-4\ ;\ X_2=2$

❖ $X_1=ln\,x_1=-4 \Leftrightarrow x_1=e^{-4}$

❖ $X_2=ln\,x_2=2 \Leftrightarrow x_2=e^2$.

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $(ln\,x)^2+2\,ln\,x-8=0$ هي: $S=\{e^{-4};e^2\}$.

ملاحظة: في بعض الأحيان، لا يكون لدينا من الوهلة الأولى معادلة من الشكل $aX^2+bX+c=0$ ، في هذه الحالة يجب إجراء التغييرات اللازمة للحصول على الشكل $aX^2+bX+c=0$.

فمثلا المعادلة $aX+b+\frac{c}{X}=0$ (مع $X\neq 0$) ليست معادلة من الدرجة الثانية. لذا يجب تحويلها إلى $aX^2+bX+c=0$ وذلك بضرب طرفي المساواة في X فنتحصل على:

$$aX+b+\frac{c}{X}=0 \Leftrightarrow X\left(aX+b+\frac{c}{X}\right)=0 \Leftrightarrow aX^2+bX+c=0.$$

6. حل متراجحة من الشكل $ln(u(x))\geq ln(v(x))$:

لحل متراجحة من الشكل $ln(u(x))\geq ln(v(x))$ يجب:

❖ إيجاد مجموعة تعريف المتراجحة.

❖ نزع اللوغاريتم من طرفي المتراجحة وذلك بتطبيق $ln(u(x))\geq ln(v(x)) \Leftrightarrow u(x)\geq v(x)$.

❖ حل المتراجحة الجديدة.

❖ اختيار الحلول التي تنتمي لمجموعة تعريف المتراجحة.

مثال: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية: $ln(x+7)\geq ln(2x+4)$.

الحل:

❖ المتراجحة معرفة إذا تحقق الشرطان التاليان: $\begin{cases}x+7>0\\2x+4>0\end{cases}$ أي إذا كان $\begin{cases}x>-7\\x>-2\end{cases}$

ومنه فإن مجموعة تعريف المتراجحة $ln(x+7)\geq ln(2x+4)$ هي: $D=]-2;+\infty[$.

❖ من أجل كل $x \in D$ ، لدينا:

$$ln(x+7) \geq ln(2x+4) \Leftrightarrow x+7 \geq 2x+4$$

$$x+7 \geq 2x+4 \Leftrightarrow x-3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$$

مجموعة حلول المتراجحة $x+7 \geq 2x+4$ هي: $S_1 =]-\infty;3]$

❖ ومنه فإن مجموعة حلول المتراجحة $ln(x+7) \geq ln(2x+4)$ هي: $S = S_1 \cap D =]-2;3]$.

7. حل متراجحة من الشكل $ln(u(x)) \geq k$:

لحل متراجحة من الشكل $ln(u(x)) \geq k$ يجب:

- ❖ إيجاد مجموعة تعريف المتراجحة.
- ❖ نزع اللوغاريتم من المتراجحة وذلك باستعمال الدالة الأسية.
- ❖ حل المتراجحة الجديدة.
- ❖ اختيار الحلول التي تنتمي لمجموعة تعريف المتراجحة.

مثال: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية: $ln(7x+1) < 8$.

الحل:

❖ المتراجحة معرفة إذا تحقق الشرط التالي: $7x+1 > 0$ أي إذا كان $x > -\frac{1}{7}$

ومنه فإن مجموعة تعريف المتراجحة $ln(7x+1) < 8$ هي: $D = \left]-\frac{1}{7};+\infty\right[$.

❖ من أجل كل $x \in D$ ، لدينا:

$$ln(7x+1) < 8 \Leftrightarrow 7x+1 < e^8$$

$$7x+1 < e^8 \Leftrightarrow x < \frac{e^8-1}{7}$$

مجموعة حلول المتراجحة $7x+1 < e^8$ هي: $S_1 = \left]-\infty;\frac{e^8-1}{7}\right[$

❖ ومنه فإن مجموعة حلول المتراجحة $ln(7x+1) < 8$ هي: $S = S_1 \cap D = \left]-\frac{1}{7};\frac{e^8-1}{7}\right[$.

8. حل متراجحة من الشكل $a(ln\,x)^2 + b\,ln\,x + c \geq 0$:

لحل متراجحة من الشكل $a(ln\,x)^2 + b\,ln\,x + c = 0$ نتبع ما يلي:

- ❖ نضع $ln\,x = X$ ، ونحل المتراجحة $aX^2 + bX + c \geq 0$.
- ❖ نطبق الدالة الأسية على الحلول المتحصل عليها لنزع اللوغاريتم.

مثال: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية: $(ln\,x)^2 - 2\,ln\,x - 15 < 0$.

الحل: نضع $ln\,x = X$ ومنه نتحصل على: $X^2 - 2X - 15 < 0$.

❖ $\Delta = 64 > 0 \Rightarrow X_1 = -3\ ;\ X_2 = 5$

ومنه نستنتج أن: $X^2 - 2X - 15 < 0$ على المجال $]-3;5[$.

❖ $X_1 = ln\,x_1 = -3 \Leftrightarrow x_1 = e^{-3}$

❖ $X_2 = ln\,x_2 = 5 \Leftrightarrow x_2 = e^5$.

بما أن الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$، فإن مجموعة حلول المتراجحة $(ln\,x)^2 - 2\,ln\,x - 15 < 0$ هي: $S = \left]e^{-3};e^5\right[$.

9. حل متراجحة على شكل جداء أو حاصل قسمة:

لحل متراجحة على شكل جداء أو حاصل قسمة تتضمن لوغاريتم يجب:

❖ إيجاد مجموعة تعريف المتراجحة.

❖ دراسة إشارة الجداء أو حاصل القسمة عن طريق جدول إشارة، مع الأخذ بعين الاعتبار أن العبارات الوسيطة في هذه الحالة هي عبارات تتضمن اللوغاريتم.

مثال: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية: $ln(x-1) \times ln(x+4) > 0$.

الحل:

❖ المتراجحة معرفة إذا تحقق الشرطان التاليان: $\begin{cases} x-1>0 \\ x+4>0 \end{cases}$ أي إذا كان $\begin{cases} x>1 \\ x>-4 \end{cases}$

ومنه فإن مجموعة تعريف المتراجحة $ln(x-1) \times ln(x+4) > 0$ هي: $D =]1;+\infty[$.

❖ ندرس إشارة طرفي المتراجحة:

- $\forall x \in]1;+\infty[\ ; ln(x-1) > 0 \Leftrightarrow x-1 > e^0 \Leftrightarrow x-1 > 1 \Leftrightarrow x > 2$.
- $\forall x \in]-4;+\infty[\ ; ln(x+4) > 0 \Leftrightarrow x+4 > e^0 \Leftrightarrow x+4 > 1 \Leftrightarrow x > -3$.

وبما أن $D =]1;+\infty[$ فإن جدول إشارة $ln(x-1) \times ln(x+4)$ على المجال $]1;+\infty[$ يكون كما يلي:

x	1		2		$+\infty$
$ln(x-1)$	‖	$-$	0	$+$	
$ln(x+4)$			$+$		
$ln(x-1) \times ln(x+4)$	‖	$-$	0	$+$	

ومنه فإن مجموعة حلول المتراجحة $ln(x-1) \times ln(x+4) > 0$ هي: $S =]2;+\infty[$.

10. حساب مشتقة الدالة $f=ln(u)$:

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق وموجبة تماما على I ، فإن الدالة f المعرفة بـ: $f=ln(u)$ قابلة للاشتقاق على I ، ولحساب f' نتبع ما يلي:

- ❖ نثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال I .
- ❖ نوضح عبارة u حيث: $f=ln(u)$ ، ثم نحسب مشتقتها u' .
- ❖ نطبق قاعدة أن: $f'=\frac{u'}{u}$ ، ونحسب f' .

مثال: لتكن الدالة f المعرفة على $]3;+\infty[$ بـ: $f(x)=ln\left(\frac{2}{x-3}\right)$. أحسب مشتقة الدالة f .

الحل:

❖ الدالة $x\to\frac{2}{x-3}$ قابلة للاشتقاق على $]3;+\infty[$ لأنها دالة ناطقة معرفة على $]3;+\infty[$. كما أن $\frac{2}{x-3}>0$ من أجل كل $x\in]3;+\infty[$. ومنه فإن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]3;+\infty[$.

❖ نضع $u(x)=\frac{2}{x-3}$ من أجل كل $x\in]3;+\infty[$.

نلاحظ أن الدالة u من الشكل $u=\frac{k}{v}$ مع $k=2$ و $v(x)=x-3$ ، ومنه فإن: $u'=\frac{-kv'}{v^2}=\frac{-2}{(x-3)^2}$ من أجل كل $x\in]3;+\infty[$.

❖ $$f'=\frac{u'}{u}=\frac{\frac{-2}{(x-3)^2}}{\frac{2}{x-3}}=\frac{-2}{(x-3)^2}\times\frac{x-3}{2}=\frac{-1}{x-3}=\frac{1}{3-x}$$

ومنه فإنه من أجل كل $x\in]3;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{1}{3-x}$.

11. حساب مشتقة دالة مرجعية f تتضمن دالة لوغاريتمية نيبيرية:

- ❖ نثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال I .
- ❖ حسب عبارة f ، نوضح إن كنا سنستعمل مشتقة: مجموع، جداء، حاصل قسمة أو دالة مركبة.
- ❖ نوضح عبارة الدوال الوسيطة التي تعبر عن f ، ثم نحسب مشتقة كل منها.
- ❖ نذكر الصيغة التي تسمح لنا بحساب f' ، ونحسب f' .
- ❖ نختزل النتيجة إلى أبعد حد ممكن للحصول على عبارة لـ f' يسهل علينا بعدها إيجاد إشارتها.

مثال: لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x^2\ln x$. أحسب مشتقة الدالة f .

الحل:

❖ الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ لأنها جداء الدالة "مربع" القابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ، والدالة اللوغاريتمية النيبيرية القابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$.

❖ نلاحظ أن: $f = u \times v$ حيث: $u(x) = x^2$ و $v(x) = \ln x$. ومنه فإن: $u'(x) = 2x$ و $v'(x) = \frac{1}{x}$.

❖ بما أن: $f = u \times v$ ، فإن: $f' = u'v + uv'$. أي: $f'(x) = 2x\ln x + \frac{1}{x} \times x^2 = 2x\ln x + x$.

ومنه فإنه من أجل كل $x \in]0;+\infty[$ ، $f'(x) = 2x\ln x + x$.

تمّ بحمد الله وتوفيقه