حلول تمارين درس الدوال الأسية -الجزء 2-

فهرس حلول التمارين

حساب مشتقة الدالة $f = e^u$:......................................3

حل التمرين 1: 3
حل التمرين 2: 4
حل التمرين 3: 5
حل التمرين 4: 6

حساب مشتقة دالة مرجعية تتضمن دالة أسية:......................................6

حل التمرين 5: 6
حل التمرين 6: 7
حل التمرين 7: 8
حل التمرين 8: 9

حساب المشتقات المتتالية لدالة تتضمن الدالة الأسية:......................................9

حل التمرين 9: 9
حل التمرين 10: 10

تحديد نهاية دالة أسية:......................................10

حل التمرين 11: 10
حل التمرين 12: 11
حل التمرين 13: 11
حل التمرين 14: 11

تحديد نهاية دالة تتضمن عبارة أسية:......................................12

حل التمرين 15: 12
حل التمرين 16: 13
حل التمرين 17: 13

تشكيل جدول تغيرات دالة أسية:......................................14

حل التمرين 18: 14
حل التمرين 19: 16
حل التمرين 20: 19

إيجاد معادلة المماس عند نقطة معينة:......................................20

حل التمرين 21: 20
حل التمرين 22: 20

دراسة دالة أسية:......................................21

حل التمرين 23: 21
حل التمرين 24: 21
حل التمرين 25: 22
دراسة دالة تتضمن عبارة أسية: 23
حل التمرين 26: 23
حل التمرين 27: 24
حل التمرين 28: 25

حساب مشتقة الدالة $f=e^{u}$:

حل التمرين 1:

1) f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{x^2}$. نضع $u(x)=x^2$ ، ومنه فإن $f(x)=e^{u(x)}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R};u(x)=x^2 \Leftrightarrow u'(x)=2x \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}; f'(x)=2xe^{x^2}$.

2) f معرفة على $\mathbb{R}^+$ بـ: $f(x)=e^{3x+\sqrt{x}}$. نضع $u(x)=3x+\sqrt{x}$ ، ومنه فإن $f(x)=e^{u(x)}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R}^{+*};u(x)=3x+\sqrt{x} \Leftrightarrow u'(x)=3+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^{+*}; f'(x)=\left(3+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^{3x+\sqrt{x}}$.

3) f معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=e^{9x^2+\frac{1}{x}}$. نضع $u(x)=9x^2+\dfrac{1}{x}$ ، ومنه فإن $f(x)=e^{u(x)}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R}^*;u(x)=9x^2+\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow u'(x)=18x-\dfrac{1}{x^2}$.

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^*; f'(x)=\left(18x-\dfrac{1}{x^2}\right)e^{9x^2+\frac{1}{x}}$.

4) f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{-3x^2+12x-4}$. نضع $u(x)=-3x^2+12x-4$ ، ومنه فإن $f(x)=e^{u(x)}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R};u(x)=-3x^2+12x-4 \Leftrightarrow u'(x)=-6x+12$.

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}; f'(x)=(-6x+12)e^{-3x^2+12x-4}$.

5) f معرفة على $\mathbb{R}^+$ بـ: $f(x)=e^{2x\sqrt{x}}$. نضع $u(x)=2x\sqrt{x}$ ، ومنه فإن $f(x)=e^{u(x)}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R}^+;u(x)=2x\sqrt{x} \Leftrightarrow u'(x)=2\sqrt{x}+\dfrac{2x}{2\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+\dfrac{2\left(\sqrt{x}\right)^2}{2\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+\sqrt{x}=3\sqrt{x}$.

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^+; f'(x)=\left(3\sqrt{x}\right)e^{2x\sqrt{x}}$.

6) f معرفة على $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ بـ: $f(x)=e^{\frac{x}{2x+1}}$. نضع $u(x)=\dfrac{x}{2x+1}$ ، ومنه فإن $f(x)=e^{u(x)}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\};u(x)=\dfrac{x}{2x+1} \Leftrightarrow u'(x)=\dfrac{2x+1-2x}{(2x+1)^2}=\dfrac{1}{(2x+1)^2}$.

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}; f'(x)=\left(\dfrac{1}{(2x+1)^2}\right)e^{\frac{x}{2x+1}}$.

7) f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{-7x^5+3x^2}$. نضع $u(x)=-7x^5+3x^2$ ، ومنه فإن $f(x)=e^{u(x)}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R};u(x)=-7x^5+3x^2 \Leftrightarrow u'(x)=-35x^4+6x$.

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}; f'(x)=\left(-35x^4+6x\right)e^{-7x^5+3x^2}$.

8) f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{(2x+1)^5}$. نضع $u(x)=(2x+1)^5$ ، ومنه فإن $f(x)=e^{u(x)}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R};u(x)=(2x+1)^5 \Leftrightarrow u'(x)=10(2x+1)^4$.

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=10(2x+1)^4 e^{(2x+1)^5}$.

حل التمرين 2:

1) f معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=e^{\frac{-2}{x}}$. نضع $u(x)=\frac{-2}{x}$ ، ومنه فإن $f(x)=e^{u(x)}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R}^*;u(x)=\frac{-2}{x} \Leftrightarrow u'(x)=\frac{2}{x^2} \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^*;\ f'(x)=\left(\frac{2}{x^2}\right)e^{\frac{-2}{x}}$.

2) f معرفة على $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3}\right\}$ بـ: $f(x)=e^{\frac{-3x-5}{-3x-2}}$. نضع $u(x)=\frac{-3x-5}{-3x-2}$ ، ومنه فإن $f(x)=e^{u(x)}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3}\right\};u(x)=\frac{-3x-5}{-3x-2}$

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3}\right\};u'(x)=\frac{-3(-3x-2)-(-3x-5)(-3)}{(-3x-2)^2}$

$=\frac{-3(-\cancel{3x}-2+\cancel{3x}+5)}{(-3x-2)^2}=-\frac{9}{(-3x-2)^2}$.

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3}\right\};\ f'(x)=-\left(\frac{9}{(-3x-2)^2}\right)e^{\frac{-3x-5}{-3x-2}}$.

3) f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{-3x^2+5x+1}$. نضع $u(x)=-3x^2+5x+1$ ، ومنه فإن $f(x)=e^{u(x)}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R};u(x)=-3x^2+5x+1 \Leftrightarrow u'(x)=-6x+5$.

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=(-6x+5)e^{-3x^2+5x+1}$.

4) f معرفة على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ بـ: $f(x)=e^{\frac{3x+2}{x+1}}$. نضع $u(x)=\frac{3x+2}{x+1}$ ، ومنه فإن $f(x)=e^{u(x)}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\};u(x)=\frac{3x+2}{x+1}$

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\};u'(x)=\frac{3(x+1)-(3x+2)}{(x+1)^2}=\frac{\cancel{3x}+3-\cancel{3x}-2}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\};\ f'(x)=\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)e^{\frac{3x+2}{x+1}}$.

5) f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{4x^2+2}$. نضع $u(x)=4x^2+2$ ، ومنه فإن $f(x)=e^{u(x)}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R};u(x)=4x^2+2 \Leftrightarrow u'(x)=8x \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=8xe^{4x^2+2}$.

6) f معرفة على $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{5}\right\}$ بـ: $f(x)=e^{\frac{5x+4}{1-5x}}$. نضع $u(x)=\frac{5x+4}{1-5x}$ ، ومنه فإن $f(x)=e^{u(x)}$.

❖ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{5}\right\}; u(x) = \frac{5x+4}{1-5x}$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{5}\right\}; u'(x) = \frac{5(1-5x)-(5x+4)(-5)}{(1-5x)^2} = \frac{5-\cancel{25x}+\cancel{25x}+20}{(1-5x)^2} = \frac{25}{(1-5x)^2}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{5}\right\}; f'(x) = \left(\frac{25}{(1-5x)^2}\right) e^{\frac{5x+4}{1-5x}}$.

حل التمرين 3:

1) f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = e^{5x^2-2}$. نضع $u(x) = 5x^2 - 2$، ومنه فإن $f(x) = e^{u(x)}$.

❖ $\forall x \in \mathbb{R}; u(x) = 5x^2 - 2 \Leftrightarrow u'(x) = 10x \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = 10xe^{5x^2-2}$.

2) f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = e^{5-2x}$. نضع $u(x) = 5-2x$، ومنه فإن $f(x) = e^{u(x)}$.

❖ $\forall x \in \mathbb{R}; u(x) = 5-2x \Leftrightarrow u'(x) = -2 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = -2e^{5-2x}$.

3) f معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = e^{\frac{-3}{x}}$. نضع $u(x) = \frac{-3}{x}$، ومنه فإن $f(x) = e^{u(x)}$.

❖ $\forall x \in \mathbb{R}^*; u(x) = \frac{-3}{x} \Leftrightarrow u'(x) = \frac{3}{x^2} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^*; f'(x) = \left(\frac{3}{x^2}\right) e^{\frac{-3}{x}}$.

4) f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = e^{-4x^2-4x+3}$. نضع $u(x) = -4x^2 - 4x + 3$، ومنه فإن $f(x) = e^{u(x)}$.

❖ $\forall x \in \mathbb{R}; u(x) = -4x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow u'(x) = -8x - 4 = -4(2x+1)$.

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = -4(2x+1)e^{-4x^2-4x+3}$.

5) f معرفة على $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ بـ: $f(x) = e^{\frac{3-x}{1-3x}}$. نضع $u(x) = \frac{3-x}{1-3x}$، ومنه فإن $f(x) = e^{u(x)}$.

❖ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}; u(x) = \frac{3-x}{1-3x}$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}; u'(x) = \frac{-1(1-3x)-(3-x)(-3)}{(1-3x)^2} = \frac{\cancel{3x}-1+9-\cancel{3x}}{(1-3x)^2} = \frac{8}{(1-3x)^2}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}; f'(x) = \left(\frac{8}{(1-3x)^2}\right) e^{\frac{3-x}{1-3x}}$.

6) f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = e^{5x+2}$. نضع $u(x) = 5x+2$، ومنه فإن $f(x) = e^{u(x)}$.

❖ $\forall x \in \mathbb{R}; u(x) = 5x+2 \Leftrightarrow u'(x) = 5 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = 5e^{5x+2}$.

7) f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = e^{3x+3}$. نضع $u(x) = 3x+3$، ومنه فإن $f(x) = e^{u(x)}$.

❖ $\forall x \in \mathbb{R}; u(x) = 3x+3 \Leftrightarrow u'(x) = 3 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = 3e^{3x+3}$.

8) f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = e^{-x^2-2x+4}$. نضع $u(x) = -x^2 - 2x + 4$، ومنه فإن $f(x) = e^{u(x)}$.

❖ $\forall x \in \mathbb{R}; u(x) = -x^2 - 2x + 4 \Leftrightarrow u'(x) = -2x - 2 = -2(x+1)$.

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=-2(x+1)e^{-x^2-2x+4}$.

9) f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{1-x}$. نضع $u(x)=1-x$، ومنه فإن $f(x)=e^{u(x)}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R};u(x)=1-x\Leftrightarrow u'(x)=-1\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=-e^{1-x}$.

حل التمرين 4:

1) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=e^{2x}\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=2e^{2x}>0$.

2) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=e^{-3x+5}\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=-3e^{-3x+5}<0$.

3) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=e^{2x^2+1}\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=4xe^{2x^2+1}$

❖ $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$

❖ $f'(x)>0\Leftrightarrow x\in]0;+\infty[$

❖ $f'(x)<0\Leftrightarrow x\in]-\infty;0[$.

حساب مشتقة دالة مرجعية تتضمن دالة أسية:

حل التمرين 5:

1) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=xe^x\Leftrightarrow f'(x)=1\times e^x+xe^x=(1+x)e^x$.

2) $f(x)=\dfrac{e^x-x}{2e^x+1}$. f معرفة على $\mathbb{R}$ لأنه $\forall x\in\mathbb{R};2e^x+1>0$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=\dfrac{e^x-x}{2e^x+1}\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{(e^x-1)(2e^x+1)-(e^x-x)(2e^x)}{(2e^x+1)^2}$

$$=\frac{(2e^{2x}+e^x-2e^x-1)-(2e^{2x}-2xe^x)}{(2e^x+1)^2}$$

$$=\frac{\cancel{2e^{2x}}+e^x-2e^x-1-\cancel{2e^{2x}}+2xe^x}{(2e^x+1)^2}=\frac{(2x-1)e^x-1}{(2e^x+1)^2}$$

$\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=\dfrac{(2x-1)e^x-1}{(2e^x+1)^2}$.

3) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=(2x-1)e^x\Leftrightarrow f'(x)=2\times e^x+(2x-1)e^x=(2x+1)e^x$.

4) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=(e^x-x)(2e^x-3)\Leftrightarrow f'(x)=(e^x-1)(2e^x-3)+(e^x-x)2e^x$

$$=2e^{2x}-3e^x-2e^x+3+2e^{2x}-2xe^x=4e^{2x}-(2x+5)e^x+3$$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=4e^{2x}-(2x+5)e^x+3$.

5) $f(x)=\sqrt{e^x-4}$.

❖ $e^x-4>0\Leftrightarrow e^x>4\Leftrightarrow x>ln4\Leftrightarrow x>2ln2\Leftrightarrow x\in]2ln2;+\infty[$.

❖ $\forall x \in \left]2\ln 2;+\infty\right[; f(x)=\sqrt{e^x-4} \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x-4}}$.

6) $\forall x \in \mathbb{R}^*; f(x)=\dfrac{1}{x}e^{2x} \Leftrightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}e^{2x}+\dfrac{1}{x}2e^{2x}=\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)e^{2x}=\left(\dfrac{2x-1}{x^2}\right)e^{2x}$.

7) $f(x)=\dfrac{1}{e^{2x-5}}$. f معرفة على $\mathbb{R}$ لأنه $\forall x \in \mathbb{R}; e^{2x-5}>0$.

❖ $\forall x \in \mathbb{R}; f(x)=\dfrac{1}{e^{2x-5}} \Leftrightarrow f'(x)=-\dfrac{2e^{2x-5}}{\left(e^{2x-5}\right)^2}=-\dfrac{2}{e^{2x-5}}$.

8) $\forall x \in \mathbb{R}; f(x)=\left(e^{3x^2+2x}+x\right)^8 \Leftrightarrow f'(x)=8\times\left((6x+2)e^{3x^2+2x}+1\right)\left(e^{3x^2+2x}+x\right)^7$

$$=\left(16(3x+1)e^{3x^2+2x}+8\right)\left(e^{3x^2+2x}+x\right)^7.$$

حل التمرين 6:

1) $\forall x \in \mathbb{R}^*; f(x)=\left(\dfrac{5}{x}\right)e^x \Leftrightarrow f'(x)=-\dfrac{5}{x^2}e^x+\dfrac{5}{x}e^x=5\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)e^x=5\left(\dfrac{x-1}{x^2}\right)e^x$.

2) $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}; f(x)=\left(\dfrac{5x+2}{4x-2}\right)e^x$.

❖ $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}; u(x)=\dfrac{5x+2}{4x-2} \Leftrightarrow u'(x)=\dfrac{5(4x-2)-4(5x+2)}{(4x-2)^2}=\dfrac{-18}{(4x-2)^2}$

❖ $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}; f'(x)=\left(\dfrac{-18}{(4x-2)^2}\right)e^x+\left(\dfrac{5x+2}{4x-2}\right)e^x=\left(\dfrac{(5x+2)(4x-2)-18}{(4x-2)^2}\right)e^x$

$$=\left(\dfrac{20x^2-10x+8x-4-18}{(4x-2)^2}\right)e^x=\left(\dfrac{10x^2-x-11}{2(2x-1)^2}\right)e^x.$$

3) $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}; f(x)=\left(-\dfrac{4x}{5x+5}\right)e^x$.

❖ $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}; u(x)=\dfrac{-4x}{5x+5} \Leftrightarrow u'(x)=\dfrac{-4(5x+5)-5(-4x)}{(5x+5)^2}=\dfrac{-20}{(5x+5)^2}$

❖ $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}; f'(x)=\left(\dfrac{-20}{(5x+5)^2}\right)e^x+\left(-\dfrac{4x}{5x+5}\right)e^x=\left(\dfrac{(-4x)(5x+5)-20}{(5x+5)^2}\right)e^x$

$$=\left(\dfrac{-20\left(x^2+x+1\right)}{(5x+5)^2}\right)e^x=\left(\dfrac{-4\left(x^2+x+1\right)}{5(x+1)^2}\right)e^x.$$

4) $\forall x \in \mathbb{R}; f(x)=\left(-5x^2+5x-5\right)e^x \Leftrightarrow f'(x)=(-10x+5)e^x+\left(-5x^2+5x-5\right)e^x$

$$=\left(-5x^2-5x\right)e^x=(-5x)(x+1)e^x.$$

5) $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{4}{3}\right\}; f(x)=\left(\frac{-x-4}{3x-4}\right)e^{x}.$

❖ $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{4}{3}\right\}; u(x)=\frac{-x-4}{3x-4}\Leftrightarrow u'(x)=\frac{-(3x-4)-3(-x-4)}{(3x-4)^2}=\frac{16}{(3x-4)^2}$

❖ $\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{4}{3}\right\}; f'(x)=\left(\frac{16}{(3x-4)^2}\right)e^{x}+\left(\frac{-x-4}{3x-4}\right)e^{x}=\left(\frac{-3x^2-8x+32}{(3x-4)^2}\right)e^{x}.$

6) $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{4}{5}\right\}; f(x)=\left(\frac{x+3}{-5x-4}\right)e^{x}.$

❖ $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{4}{5}\right\}; u(x)=\frac{x+3}{-5x-4}\Leftrightarrow u'(x)=\frac{(-5x-4)+5(x+3)}{(-5x-4)^2}=\frac{11}{(-5x-4)^2}$

❖ $\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{4}{5}\right\}; f'(x)=\left(\frac{11}{(-5x-4)^2}\right)e^{x}+\left(\frac{x+3}{-5x-4}\right)e^{x}=\left(\frac{(-5x-4)(x+3)+11}{(-5x-4)^2}\right)e^{x}$

$$=\left(\frac{-5x^2-15x-4x-12+11}{(-5x-4)^2}\right)e^{x}=\left(\frac{-5x^2-19x-1}{(-5x-4)^2}\right)e^{x}.$$

7) $\forall x\in\mathbb{R}; f(x)=f(x)=(4x-2)e^{x}\Leftrightarrow f'(x)=4e^{x}+(4x-2)e^{x}$

$$=(4x-2+4)e^{x}=2(2x+1)e^{x}.$$

حل التمرين 7:

1) $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}; f(x)=\frac{e^{-2x-4}}{3x-3}=\frac{e^{-2x-4}}{3(x-1)}.$

❖ $\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}; f'(x)=\frac{3e^{-2x-4}+2(3x-3)e^{-2x-4}}{(3(x-1))^2}=\left(\frac{6x-3}{9(x-1)^2}\right)e^{-2x-4}$

$$=\left(\frac{2x-1}{3(x-1)^2}\right)e^{-2x-4}.$$

2) $\forall x\in\mathbb{R}; f(x)=(-2x-1)e^{-x-1}.$

❖ $\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}; f'(x)=-2e^{-x-1}-(-2x-1)e^{-x-1}=(2x+1-2)e^{-x-1}=(2x-1)e^{-x-1}.$

3) $\forall x\in\mathbb{R}; f(x)=\frac{4-3x}{e^{4-x}}=(4-3x)e^{x-4}.$

❖ $\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}; f'(x)=-3e^{x-4}+(4-3x)e^{x-4}=(4-3x-3)e^{x-4}=(1-3x)e^{x-4}.$

4) $\forall x\in\mathbb{R}; f(x)=(-x-3)e^{3-x}.$

❖ $\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}; f'(x)=-e^{3-x}-(-x-3)e^{3-x}=(x+3-1)e^{3-x}=(x+2)e^{3-x}.$

حل التمرين 8:

1) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=(2x+1)e^{2x+1}$.

نضع $u(x)=2x+1$، ومنه فإن $f(x)=u(x)e^{u(x)}$.

- ❖ $\forall x\in\mathbb{R};u(x)=2x+1 \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};u'(x)=2$
- ❖ $\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=2e^{2x+1}+2(2x+1)e^{2x+1}=4(x+1)e^{2x+1}$.
  - $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$.
  - $f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in]-1;+\infty[$
  - $f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in]-\infty;-1[$.

2) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2} \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=\dfrac{e^x-\left(-e^{-x}\right)}{2}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}>0$.

3) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=\dfrac{3e^x}{e^{2x}+1} \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=\dfrac{3e^x\left(e^{2x}+1\right)-3e^x\left(2e^{2x}\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$

$$=\frac{3e^x\left(e^{2x}+1-2e^{2x}\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}=\frac{3e^x\left(1-e^{2x}\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$$

$$=\frac{3e^x\left(1-e^x\right)\left(1+e^x\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$$

❖ نعلم أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، $\dfrac{3e^x\left(1+e^x\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}>0$ ومنه فإن $f'(x)$ من إشارة $\left(1-e^x\right)$.

- ❖ $\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-e^x=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$.
- ❖ $\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)>0 \Leftrightarrow 1-e^x>0 \Leftrightarrow e^x<1 \Leftrightarrow x\in]-\infty;0[$
- ❖ $\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)<0 \Leftrightarrow 1-e^x<0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x\in]0;+\infty[$.

حساب المشتقات المتتالية لدالة تتضمن الدالة الأسية:

حل التمرين 9:

1) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=(2x-2)e^{5x+3}$.

- ❖ $\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=2e^{5x+3}+5(2x-2)e^{5x+3}=(10x-8)e^{5x+3}$.
- ❖ $\forall x\in\mathbb{R};\ f''(x)=10e^{5x+3}+5(10x-8)e^{5x+3}=(50x-30)e^{5x+3}$.

2) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=(-5x)e^{x+5}$.

- ❖ $\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=(-5)e^{x+5}+(-5x)e^{x+5}=-5(x+1)e^{x+5}$.
- ❖ $\forall x\in\mathbb{R};\ f''(x)=(-5)e^{x+5}+(-5x-5)e^{x+5}=-5(x+2)e^{x+5}$.

3) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=\left(-5x^2-4x-4\right)e^{x+5}$.

- $\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=(-10x-4)e^{x+5}+\left(-5x^2-4x-4\right)e^{x+5}=\left(-5x^2-14x-8\right)e^{x+5}$.
- $\forall x\in\mathbb{R};\ f''(x)=(-10x-14)e^{x+5}+\left(-5x^2-14x-8\right)e^{x+5}=\left(-5x^2-24x-22\right)e^{x+5}$.

4) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=\left(5-x^2\right)e^{x+2}$.

- $\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=(-2x)e^{x+2}+\left(5-x^2\right)e^{x+2}=\left(5-x^2-2x\right)e^{x+2}$.
- $\forall x\in\mathbb{R};\ f''(x)=(-2x-2)e^{x+2}+\left(5-x^2-2x\right)e^{x+2}=\left(3-x^2-4x\right)e^{x+2}$.

حل التمرين 10:

1) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=(3x+2)e^{4x}$

- $\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=3e^{4x}+(3x+2)\left(4e^{4x}\right)=(12x+11)e^{4x}$.
- $\forall x\in\mathbb{R};\ f''(x)=12e^{4x}+4(12x+11)e^{4x}=8(6x+7)e^{4x}$.

2) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=\left(x^3+2x-7\right)e^{x}$

- $\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=\left(3x^2+2\right)e^{x}+\left(x^3+2x-7\right)e^{x}=\left(x^3+3x^2+2x-5\right)e^{x}$.
- $\forall x\in\mathbb{R};\ f''(x)=\left(3x^2+6x+2\right)e^{x}+\left(x^3+3x^2+2x-5\right)e^{x}=\left(x^3+6x^2+8x-3\right)e^{x}$.

3) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=\left(e^{x}-2\right)^4$.

- $\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=4e^{x}\left(e^{x}-2\right)^3$.
- $\forall x\in\mathbb{R};\ f''(x)=4e^{x}\left(e^{x}-2\right)^3+4e^{x}\left[3e^{x}\left(e^{x}-2\right)^2\right]$

$$=4e^{x}\left(e^{x}-2\right)^2\left(4e^{x}-2\right)=8e^{x}\left(2e^{x}-1\right)\left(e^{x}-2\right)^2.$$

4) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=(-3x-5)e^{5-3x}$.

- $\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=-3e^{5-3x}-3(-3x-5)e^{5-3x}=-3(-3x-5+1)e^{5-3x}=3(3x+4)e^{5-3x}$.
- $\forall x\in\mathbb{R};\ f''(x)=9e^{5-3x}-3(9x+12)e^{5-3x}=3(-9x-9)e^{5-3x}=-27(x+1)e^{5-3x}$.

تحديد نهاية دالة أسية:

حل التمرين 11:

من خلال الدرس نعلم أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$.

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} -5e^{x}=0$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} -5e^{x}=-\infty$.

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} 5+e^{x}=5$.

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3+e^{x}=+\infty$.

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2-e^{x}=2$.

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.

7) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-3}{e^x} = \lim\limits_{x\to-\infty} -3e^{-x} = -\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty\right)$.

8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{7} = +\infty$.

9) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2}{3}e^x = 0$.

10) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} -2e^{-x} = 0$.

حل التمرين 12:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x+3) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x+3} = +\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$.

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-3) = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-3} = 0$.

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x) = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.

حل التمرين 13:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-x) = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x} = 0$.

2) $\lim\limits_{x\to3} \left(2x^2-18\right) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to3} 2e^{2x^2-18} = 2$.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2-3x}{2x-1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{2x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{2}\right) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x^2-3x}{2x-1}} = +\infty$.

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-x^3-5\right) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x^3-5} = +\infty$.

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x^2-3x+5\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x^2\right) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x^2-3x+5} = +\infty$.

6) $\lim\limits_{x\to0} \left(\frac{2x^2-x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to0} \left(\frac{x(2x-1)}{x}\right) = \lim\limits_{x\to0} (2x-1) = -1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0} e^{\frac{2x^2-x}{x}} = e^{-1}$.

7) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{2x^2-3x}{x+5}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{2x^2}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2x) = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{2x^2-3x}{x+5}} = 0$.

8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2+x+1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2\right) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2+x+1} = +\infty$.

حل التمرين 14:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} (3-x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} e^{3-x} = +\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(3x^2-5x+4\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(3x^2\right) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} e^{3x^2-5x+4} = +\infty$.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3x-7}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3x}\right)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{3x-7}}=1.$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-4x^5-2x+3}{3x-7}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-4x^5}{3x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-4x^4}{3}\right)=-\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{-4x^5-2x+3}{3x-7}}=0.$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-3x-5\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\right)=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x^2-3x-5}=+\infty.$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-3x-5\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2\right)=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x^2-3x-5}=+\infty.$

تحديد نهاية دالة تتضمن عبارة أسية:

حل التمرين 15:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x-3)=-\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x-3}\right)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-4}{e^{-x-3}}\right)=-\infty.$

2) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+2)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-6x^2-4x+2\right)=-\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-6x^2-4x+2}\right)=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+2}{e^{-6x^2-4x+2}}=-\infty.$

3) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x+8)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-5x-8)=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-5x-8}\right)=+\infty\end{array}\right\}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x+8)e^{-5x-8}=+\infty.$

4) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(6x+6)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(7x)=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{7x}\right)=+\infty\end{array}\right\}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}(6x+6)e^{7x}=+\infty.$

5) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2-x-1\right)=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{2x^2-x-1}\right)=+\infty\end{array}\right\}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}2x+1+e^{2x^2-x-1}=+\infty.$

6) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(-5x-5)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-15x^2+5x+4\right)=-\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{2x^2-x-1}\right)=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-5x-5}{e^{-15x^2+5x+4}}=-\infty.$

7) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(5x-3)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x^2+3x-5\right)=-\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{2x^2-x-1}\right)=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}5x-3+e^{-2x^2+3x-5}=+\infty.$

8) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(-x-7)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+21x-4\right)=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x^2+21x-4}\right)=+\infty\end{array}\right\}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}(-x-7)e^{x^2+21x-4}=-\infty.$

9) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(-5x-6)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2+9x+3\right)=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{2x^2+9x+3}\right)=+\infty\end{array}\right\}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}(-5x-6)e^{2x^2+9x+3}=-\infty.$

حل التمرين 16:

1) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^{x}+5\right)=5\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(3e^{x}-7\right)=-7\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2e^{x}+5}{3e^{x}-7}=-\dfrac{5}{7}.$

2) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^{x}\right)=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-7x\right)=+\infty\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}2e^{x}-7x=+\infty.$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-x}-2\right)=+\infty\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}-2}{-7}=-\infty.$

4) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x+7\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x\right)=+\infty\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-2x}\right)=+\infty\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x+7\right)e^{-2x}=+\infty.$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^{2}+1\right)=-\infty\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(3e^{-x^{2}+1}\right)=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}2+3e^{-x^{2}+1}=2.$

6) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x}-3\right)=-3\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x}+2\right)=2\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{x}-3}{e^{x}+2}=-\dfrac{3}{2}.$

7) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0}\left(e^{x}\right)=1\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0}\left(e^{x}+1\right)=2\\ \lim\limits_{x\to0}\left(e^{2x}\right)=1\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}+1}{e^{2x}}=2.$

حل التمرين 17:

1) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^{2}+4\right)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x}\right)=+\infty\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^{2}+4\right)e^{x}=-\infty.$

2) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x}\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{2}\right)=+\infty\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}+x^{2}=+\infty.$

3) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x}\right)=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^{5}\right)=+\infty\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}-3x^{5}=+\infty.$

4) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0}\left(e^{x}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to0}\left(1-2e^{x}\right)=-1\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0}e^{x}\left(1-2e^{x}\right)=-1.$

5) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x}\right)=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\right)=-\infty\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{x}}{x}=0.$

6) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+1\right)=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^x-3\right)=-3\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+1}{2e^x-3}=-\dfrac{1}{3}.$

7) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2+1\right)=+\infty\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} e^x+2x^2+1=+\infty.$

8) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-2x^3+1\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-3e^x\right)=1\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-2x^3+1\right)\left(1-3e^x\right)=+\infty.$

تشكيل جدول تغيرات دالة أسية:

حل التمرين 18:

1) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=e^x+x\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=e^x+1>0.$

❖ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x\right)=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\right)=-\infty\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+x\right)=-\infty.$

❖ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\right)=+\infty\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+x\right)=+\infty.$

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=xe^x\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x.$

❖ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $e^x>0$. ومنه فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $(1+x)$.

❖ $f'(x)=0\Leftrightarrow 1+x=0\Leftrightarrow x=-1.$

❖ $f'(x)>0\Leftrightarrow 1+x>0\Leftrightarrow x>-1\Leftrightarrow x\in\left]-1;+\infty\right[.$

❖ من الدرس لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^x\right)=0$.

❖ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\right)=+\infty\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^x\right)=+\infty.$

❖ $f(-1)=(-1)e^{-1}=-e^{-1}=-\dfrac{1}{e}.$

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R}^*; f(x)=\dfrac{e^x}{2x} \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^*; f'(x)=\dfrac{2xe^x-2e^x}{(2x)^2}=\dfrac{2(x-1)e^x}{4x^2}=\dfrac{(x-1)e^x}{2x^2}$.

❖ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، $e^x>0$ و $2x^2>0$. ومنه فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x-1)$.

❖ $f'(x)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

❖ $f'(x)>0 \Leftrightarrow x-1>0 \Leftrightarrow x>1 \Leftrightarrow x\in\left]1;+\infty\right[$.

❖ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x\right)=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(2x)=-\infty\end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^x}{2x}\right)=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}\right)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{2x}\right)=+\infty$.

❖ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0}\left(e^x\right)=1\\ \lim\limits_{x\to0^+}(2x)=0^+\end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{e^x}{2x}\right)=+\infty$ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0}\left(e^x\right)=1\\ \lim\limits_{x\to0^-}(2x)=0^-\end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{e^x}{2x}\right)=-\infty$.

❖ $f(1)=\dfrac{e^1}{2\times1}=\dfrac{e}{2}$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{e}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

4) $\forall x\in\mathbb{R}; f(x)=e^x-3x+1 \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}; f'(x)=e^x-3$.

❖ $f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-3=0 \Leftrightarrow e^x=3 \Leftrightarrow x=ln3$.

❖ $f'(x)>0 \Leftrightarrow e^x-3>0 \Leftrightarrow e^x>3 \Leftrightarrow x>ln3 \Leftrightarrow x\in\left]ln3;+\infty\right[$.

❖ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x\right)=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-3x+1)=+\infty\end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} e^x-3x+1=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x-3x+1=\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(1-\dfrac{3x}{e^x}+e^{-x}\right)$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x}{e^x}=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}\right)=0$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}-3x+1=+\infty$.

❖ $f(\ln 3)=e^{\ln 3}-3\ln 3+1=3-3\ln 3+1=4-3\ln 3$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$		$\ln 3$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$4-3\ln 3$	$\nearrow$	$+\infty$

5) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=e^{x^2+3x+1} \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=(2x+3)e^{x^2+3x+1}$.

❖ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $e^{x^2+3x+1}>0$. ومنه فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $(2x+3)$.

❖ $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x+3=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{2}$.

❖ $f'(x)>0 \Leftrightarrow 2x+3>0 \Leftrightarrow x>-\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x\in\left]-\dfrac{3}{2};+\infty\right[$.

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+3x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2\right)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^2+3x+1}=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+3x+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\right)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2+3x+1}=+\infty$.

❖ $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=e^{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+3\left(-\frac{3}{2}\right)+1}=e^{\frac{9-18+4}{4}}=e^{\frac{-5}{4}}$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$		$-\dfrac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$e^{\frac{-5}{4}}$	$\nearrow$	$+\infty$

حل التمرين 19:

1) $\forall x\in I;\ f(x)=-2(2x+1)e^{-x}$

❖ $\forall x\in I;\ f'(x)=-4e^{-x}+(4x+2)e^{-x}=2(2x-1)e^{-x}$.

- من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $2e^{-x}>0$. ومنه فإن $f'(x)$ من إشارة $(2x-1)$:

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

- $f'(x)>0 \Leftrightarrow 2x-1>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x\in\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

❖ $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-2\left(2\left(\dfrac{1}{2}\right)+1\right)e^{-\frac{1}{2}}=-\dfrac{4}{\sqrt{e}}$.

❖ $f(-5)=-2\left(2\times(-5)+1\right)e^{5}=18e^{5}$.

❖ $f(2)=-2\left(2(2)+1\right)e^{-2}=-10e^{-2}$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	-5		$\frac{1}{2}$		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$18e^5$	$\searrow$	$-\frac{4}{\sqrt{e}}$	$\nearrow$	$-10e^{-2}$

2) $\forall x \in I; f(x)=(x-5)e^{3x} \Leftrightarrow \forall x \in I; f'(x)=e^{3x}+3(x-5)e^{3x}=(3x-14)e^{3x}$.

• من أجل كل $x \in \mathbb{R}$، $e^{3x}>0$. ومنه فإن $f'(x)$ من إشارة $(3x-14)$:

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x-14=0 \Leftrightarrow x=\frac{14}{3}$.
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow 3x-14>0 \Leftrightarrow x>\frac{14}{3} \Leftrightarrow x \in \left]\frac{14}{3};+\infty\right[$.

❖ $f\left(\frac{14}{3}\right)=\left(\frac{14}{3}-5\right)e^{3\left(\frac{14}{3}\right)}=\left(\frac{-1}{3}\right)e^{14}$.

❖ $f(1)=(1-5)e^{3(1)}=-4e^3$.

❖ $f(5)=(5-5)e^{3(5)}=0$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	1		$\frac{14}{3}$		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$-4e^3$	$\searrow$	$\left(\frac{-1}{3}\right)e^{14}$	$\nearrow$	0

3) $\forall x \in I; f(x)=5x+5-2e^{-2x} \Leftrightarrow \forall x \in I; f'(x)=5+4e^{-2x}>0$.

❖ $f(1)=5\times1+5-2e^{-2\times1}=10-2e^{-2}$.

❖ $f(5)=5\times5+5-2e^{-2\times5}=30-2e^{-10}$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	1		5
$f'(x)$		$+$	
f	$10-2e^{-2}$	$\nearrow$	$30-2e^{-10}$

4) $\forall x \in I; f(x)=1-2e^{3x} \Leftrightarrow \forall x \in I; f'(x)=-6e^{3x}<0$.

❖ $f(1)=1-2e^3$.

❖ $f(5)=1-2e^{15}$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	1	5
$f'(x)$	$-$	
f	$1-2e^{3}$ ↘	$1-2e^{15}$

5) $\forall x \in I;\ f(x) = 4xe^{4x} \Leftrightarrow \forall x \in I;\ f'(x) = 4e^{4x} + 16xe^{4x} = 4(4x+1)e^{4x}$.

• من أجل كل $x \in \mathbb{R}$، $4e^{4x} > 0$. ومنه فإن $f'(x)$ من إشارة $(4x+1)$:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$.
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 4x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{1}{4};+\infty\right[$.

❖ $f\left(-\frac{1}{4}\right) = 4\left(-\frac{1}{4}\right)e^{4\left(-\frac{1}{4}\right)} = -e^{-1}$.

❖ $f(-5) = 4(-5)e^{4(-5)} = -20e^{-20}$.

❖ $f(2) = 4(2)e^{4(2)} = 8e^{8}$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	-5	$-\frac{1}{4}$	2
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$-20e^{-20}$ ↘	$-e^{-1}$	↗ $8e^{8}$

6) $\forall x \in I;\ f(x) = -(2x+3)e^{-3x} \Leftrightarrow \forall x \in I;\ f'(x) = -2e^{-3x} + 3(2x+3)e^{-3x}$
$= (6x+7)e^{-3x}$.

• من أجل كل $x \in \mathbb{R}$، $e^{-3x} > 0$. ومنه فإن $f'(x)$ من إشارة $(6x+7)$:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x+7 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{6}$.
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 6x+7 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{7}{6} \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{7}{6};+\infty\right[$.

❖ $f\left(-\frac{7}{6}\right) = -\left(2\left(-\frac{7}{6}\right)+3\right)e^{-3\left(-\frac{7}{6}\right)} = -\frac{2}{3}e^{\frac{7}{2}}$.

❖ $f(-10) = -(2(-10)+3)e^{-3(-10)} = 17e^{30}$.

❖ $f(5) = -(2(5)+3)e^{-3(5)} = -13e^{-15}$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	-10		$-\frac{7}{6}$		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$17e^{30}$	$\searrow$	$-\frac{2}{3}e^{\frac{7}{2}}$	$\nearrow$	$-13e^{-15}$

حل التمرين 20:

1) $\forall x\in\mathbb{R}; f(x)=\left(x^2-\frac{22}{3}x+\frac{113}{9}\right)e^{-3x-3}$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}; f'(x)=\left(2x-\frac{22}{3}\right)e^{-3x-3}-3\left(x^2-\frac{22}{3}x+\frac{113}{9}\right)e^{-3x-3}$

$=\left(-3x^2+24x+45\right)e^{-3x-3}$

❖ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، $e^{-3x-3}>0$. ومنه فإن $f'(x)$ من إشارة $\left(-3x^2+24x+45\right)$:

❖ $f'(x)=0 \Leftrightarrow -3x^2+24x+45=0$.

- $\Delta=1116>0 \Rightarrow x_1=3$; $x_2=5$.

❖ ومنه فإن جدول إشارة f' يكون كالتالي:

x	$-\infty$		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2) $\forall x\in\mathbb{R}; f(x)=\left(x^2-15\right)e^{4-x}$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}; f'(x)=(2x)e^{4-x}-\left(x^2-15\right)e^{4-x}=\left(-x^2+2x+15\right)e^{4-x}$.

❖ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، $e^{4-x}>0$. ومنه فإن $f'(x)$ من إشارة $\left(-x^2+2x-15\right)$:

❖ $f'(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+2x+15=0$.

- $\Delta=64>0 \Rightarrow x_1=-3$; $x_2=5$.

❖ ومنه فإن جدول إشارة f' يكون كالتالي:

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3) $\forall x\in\mathbb{R}; f(x)=-(3x-1)e^{-3x}$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}; f'(x)=-3e^{-3x}+3(3x-1)e^{-3x}=3(3x-2)e^{-3x}$.

❖ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، $3e^{-3x}>0$. ومنه فإن $f'(x)$ من إشارة $(3x-2)$:

❖ $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$.

❖ $f'(x)>0 \Leftrightarrow 3x-2>0 \Leftrightarrow x>\frac{2}{3}$.

❖ ومنه فإن جدول إشارة f' يكون كالتالي:

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

4) $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) = (x^2 - 5x + 5)e^{3-x}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = (2x-5)e^{3-x} - (x^2 - 5x + 5)e^{3-x} = (-x^2 + 7x - 10)e^{3-x}$.

❖ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$، $e^{3-x} > 0$. ومنه فإن $f'(x)$ من إشارة $(-x^2 + 7x - 10)$:

❖ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 7x - 10 = 0$.

- $\Delta = 9 > 0 \Rightarrow x_1 = 2 \; ; \; x_2 = 5$.

❖ ومنه فإن جدول إشارة f' يكون كالتالي:

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

إيجاد معادلة المماس عند نقطة معينة:

حل التمرين 21:

1) $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) = (2-x)e^{2x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = -e^{2x} + 2(2-x)e^{2x} = (3-2x)e^{2x}$.

❖ $(f'(0) = 3 \; ; \; f(0) = 2) \Rightarrow y = f'(0)(x-0) + f(0) = 3x + 2$.

❖ معادلة المماس T لـ (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0 هي: $y = 3x + 2$.

2) $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) = 3 - x + 6e^{-2x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = -12e^{-2x} - 1$.

❖ $(f'(0) = -13 \; ; \; f(0) = 9) \Rightarrow y = f'(0)(x-0) + f(0) = -13x + 9$.

❖ معادلة المماس T لـ (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0 هي: $y = -13x + 9$.

3) $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) = (3-5x)e^{-x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = -5e^{-x} - (3-5x)e^{-x} = (5x-8)e^{-x}$.

❖ $(f'(0) = -8 \; ; \; f(0) = 3) \Rightarrow y = f'(0)(x-0) + f(0) = -8x + 3$.

❖ معادلة المماس T لـ (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0 هي: $y = -8x + 3$.

4) $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) = 3x + 2 + 7e^{-x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = 3 - 7e^{-x}$.

❖ $(f'(0) = -4 \; ; \; f(0) = 9) \Rightarrow y = f'(0)(x-0) + f(0) = -4x + 9$.

❖ معادلة المماس T لـ (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0 هي: $y = -4x + 9$.

5) $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) = -4(x-1)e^{4x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = -4e^{4x} - 16(x-1)e^{4x}$

$= -4(4x-3)e^{4x}$.

❖ $(f'(0) = 12 \; ; \; f(0) = 4) \Rightarrow y = f'(0)(x-0) + f(0) = 12x + 4$

❖ معادلة المماس T لـ (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0 هي: $y = 12x + 4$.

حل التمرين 22:

1) $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) = 5 - 4x + 5e^{4x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = 20e^{4x} - 4 = 4(5e^{4x} - 1)$.

❖ $f'(1) = 20e^4 - 4 \; ; \; f(1) = 1 + 5e^4$

❖ $y = f'(1)(x-1) + f(1) = (20e^4 - 4)x - (20e^4 - 4) + 1 + 5e^4 = (20e^4 - 4)x + 5 - 15e^4$.

❖ معادلة المماس T لـ (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 1 هي: $y = (20e^4 - 4)x + 5 - 15e^4$.

2) $\forall x\in\mathbb{R}; f(x)=-2(x-2)+4e^{-x} \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}; f'(x)=-2-4e^{-x}=-2\left(1+2e^{-x}\right)$.

❖ $f'(-1)=-2-4e$; $f(-1)=6+4e$

❖ $y=f'(-1)(x+1)+f(-1)=(-2-4e)x+(-2-4e)+(6+4e)$
$=(-2-4e)x+4$.

❖ معادلة المماس T لـ (C_f) عند النقطة التي فاصلتها (-1) هي: $y=(-2-4e)x+4$.

دراسة دالة أسية:

حل التمرين 23:

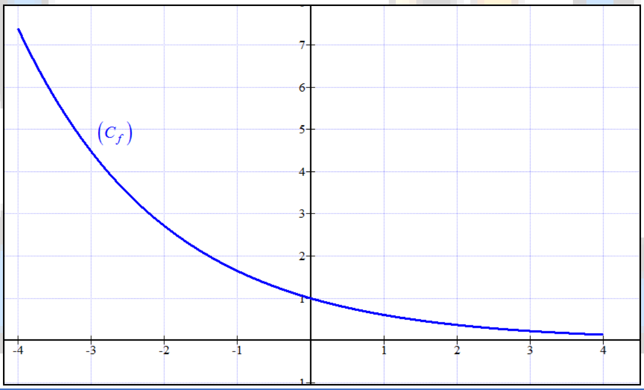
1) $\forall x\in\mathbb{R}; f(x)=e^{\frac{-x}{2}} \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}; f'(x)=-\frac{1}{2}e^{\frac{-x}{2}}<0$.

2) $f(-4)=e^{2}$; $f(4)=e^{-2}$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	-4	4
$f'(x)$	$-$	
f	e^{2} ↘	e^{-2}

3) الرسم الموالي يمثل (C_f) على المجال $[-4;4]$.



حل التمرين 24:

1) $\forall x\in\mathbb{R}; f(x)=e^{-2x^2} \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}; f'(x)=-4xe^{-2x^2}$.

❖ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $e^{-2x^2}>0$. ومنه فإن $f'(x)$ من إشارة $(-4x)$:

❖ $f'(x)=0 \Leftrightarrow -4x=0 \Leftrightarrow x=0$.

❖ $f'(x)>0 \Leftrightarrow -4x>0 \Leftrightarrow x<0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty;0\right[$.

❖ $f(0)=e^{0}=1$; $f(-5)=e^{-50}$; $f(5)=e^{-50}$.

2) ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	-5	0	5
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	e^{-50} ↗	1	↘ e^{-50}

3) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(-x)=e^{-2(-x)^2}=e^{-2x^2}\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R};\ f(-x)=f(x)$.

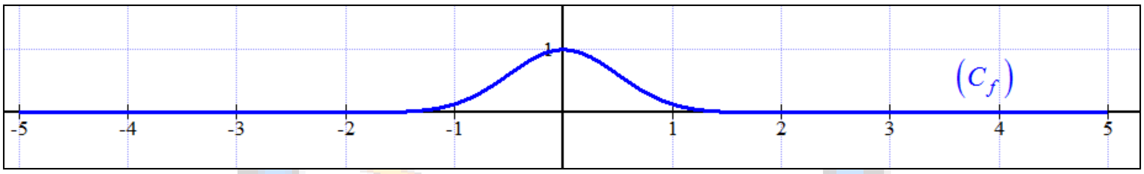
❖ $M(x,y)\in(C_f)\Leftrightarrow y=f(x)=f(-x)\Leftrightarrow M'(-x,y)\in(C_f)$.

❖ النقطتان $M(x,y)$ و $M'(-x,y)$ لهما نفس الترتيب وفاصلتان متعاكستان، إذن فهما متناظرتان بالنسبة لمحور التراتيب. نستنتج أن: (C_f) يقبل محور التراتيب كمحور تناظر.

4)

x	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5	10
$f(x)$	1	0,607	0,135	0,011	3×10^{-4}	$1,5\times10^{-8}$	1×10^{-14}	2×10^{-22}	1×10^{-87}

5) الرسم الموالي يمثل (C_f) على المجال $[-5;5]$.



حل التمرين 25:

1) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=e^{-3x}\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=-3e^{-3x}<0$.

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-3x}=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-3x}=0$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	$+\infty$	↘	0

❖ $\forall x\in\mathbb{R};g(x)=e^{-2x^2}\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R};g'(x)=-4xe^{-2x^2}$.

❖ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $e^{-2x^2}>0$. ومنه فإن $g'(x)$ من إشارة $(-4x)$:

❖ $g'(x)=0\Leftrightarrow -4x=0\Leftrightarrow x=0$.

❖ $g'(x)>0\Leftrightarrow -4x>0\Leftrightarrow x<0\Leftrightarrow x\in]-\infty;0[$.

❖ $g(0)=e^0=1$.

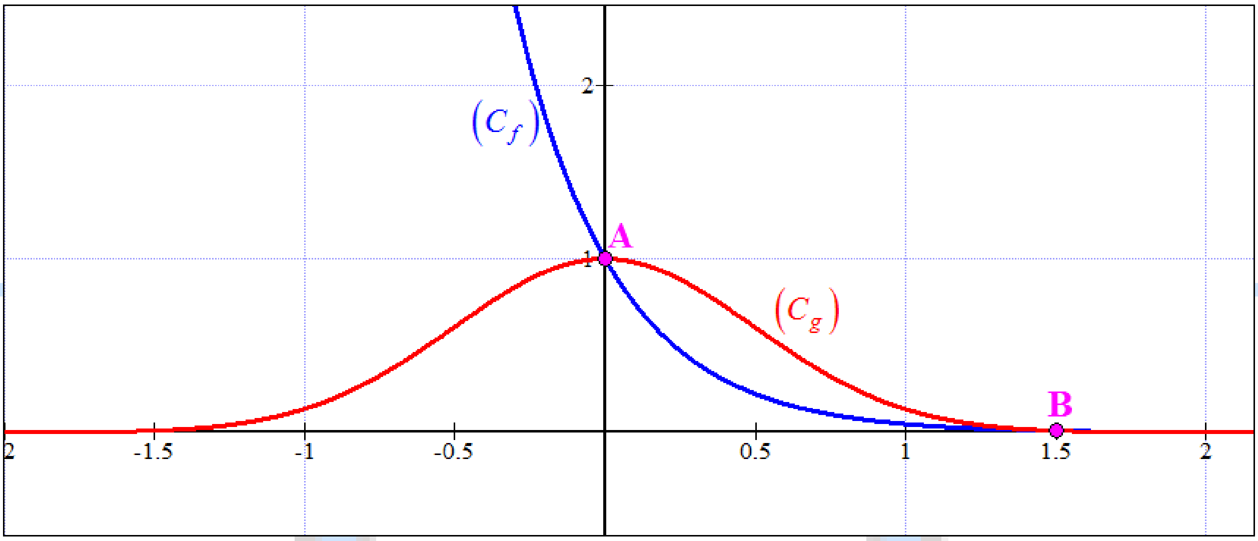
❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x^2}=0$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x^2}=0$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة g يكون كالتالي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	1	$-$	
g	0	↗	1	↘	0

2) الرسم الموالي يمثل (C_f) و (C_g).



3) لإيجاد نقاط تقاطع (C_f) و (C_g) حسابيا، نحل المعادلة $f(x)=g(x)$.

❖ $f(x)=g(x) \Leftrightarrow e^{-3x}=e^{-2x^2} \Leftrightarrow -3x=-2x^2 \Leftrightarrow 2x^2-3x=0$

$$\Leftrightarrow x(2x-3)=0 \Leftrightarrow x=0 \ / \ 2x-3=0 \Leftrightarrow x=0 \ / \ x=\frac{3}{2}.$$

❖ $x=0 \Leftrightarrow y=e^0=1.$

❖ $x=\frac{3}{2} \Leftrightarrow y=e^{-3\left(\frac{3}{2}\right)}=e^{\frac{-9}{2}} \simeq 0{,}01.$

دراسة دالة تتضمن عبارة أسية:

حل التمرين 26:

1) $\forall x \in \mathbb{R}; f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; f'(x)=\dfrac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2}$

$$=\frac{\cancel{e^{2x}}+e^x-\cancel{e^{2x}}+e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}>0$$

❖ $f(-5)=\dfrac{e^{-5}-1}{e^{-5}+1} \simeq -0{,}99$.

❖ $f(5)=\dfrac{e^5-1}{e^5+1} \simeq 0{,}99$.

2) ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	-5		5
$f'(x)$		$+$	
f	$-0{,}99$	$\nearrow$	$0{,}99$

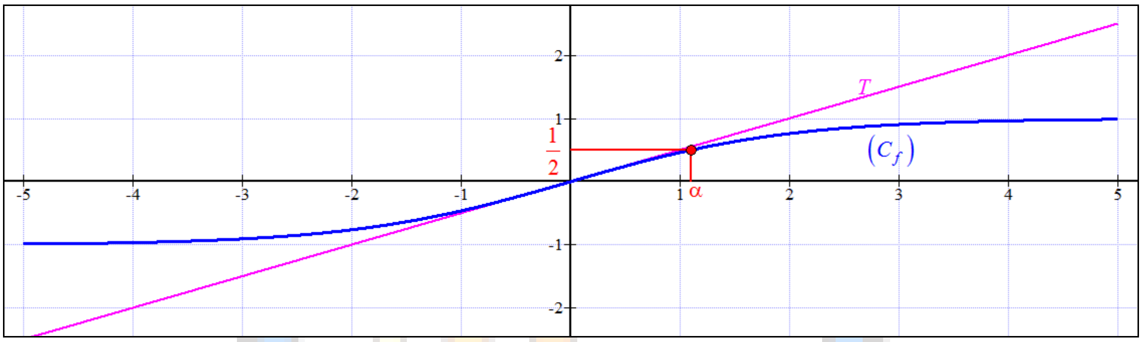
3) $f(0)=\dfrac{e^0-1}{e^0+1}=0$

ومنه فإن $\left(C_f\right)$ يشمل النقطة O.

4) $\left(f'(0)=\dfrac{2e^0}{\left(e^0+1\right)^2}=\dfrac{1}{2}\ ;\ f(0)=\dfrac{e^0-1}{e^0+1}=0\right)\Rightarrow y=f'(0)(x-0)+f(0)=\dfrac{1}{2}x$.

❖ معامل توجيه المماس T لـ $\left(C_f\right)$ عند النقطة O هو: $\dfrac{1}{2}$.

5) الرسم الموالي يمثل $\left(C_f\right)$ و المماس T على المجال $[-5;5]$.



حل التمرين 27:

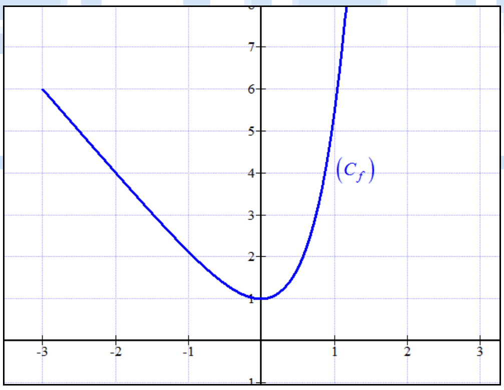
1) $\forall x\in[-3;3]; f(x)=e^{2x}-2x \Leftrightarrow \forall x\in[-3;3]; f'(x)=2e^{2x}-2=2\left(e^{2x}-1\right)$.

- ❖ $f'(x)=0\Leftrightarrow e^{2x}-1=0\Leftrightarrow e^{2x}=1>0\Leftrightarrow 2x=ln1=0\Leftrightarrow x=0$.
- ❖ $f'(x)>0\Leftrightarrow e^{2x}-1>0\Leftrightarrow x>0\Leftrightarrow x\in]0;3[$.
- ❖ $f(0)=e^{2\times 0}-2\times 0=1$.
- ❖ $f(-3)=e^{2(-3)}-2(-3)=e^{-6}+6$.
- ❖ $f(3)=e^{2(3)}-2(3)=e^{6}-6$.

2) ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	-3		0		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$e^{-6}+6$	↘	1	↗	$e^{6}-6$

3) الرسم الموالي يمثل $\left(C_f\right)$.



حل التمرين 28:

1) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=\dfrac{2e^{2x}\left(e^{2x}+1\right)-2e^{2x}\left(e^{2x}-1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$

$$=\frac{2e^{2x}\left(\cancel{e^{2x}}+1-\cancel{e^{2x}}+1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}=\frac{4e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}>0.$$

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=-1.$

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}\left(1-e^{-2x}\right)}{e^{2x}\left(1+e^{-2x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1.$

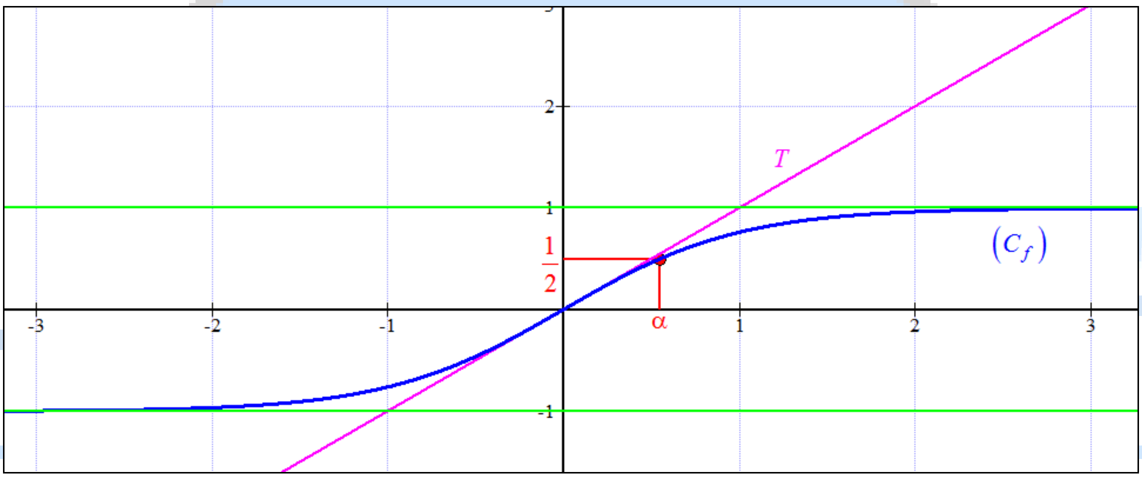
2) ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$-1 \nearrow 1$

3) $\left(f'(0)=\dfrac{4e^0}{\left(e^0+1\right)^2}=1\ ;\ f(0)=\dfrac{e^0-1}{e^0+1}=0\right)\Rightarrow y=f'(0)(x-0)+f(0)=x.$

❖ معادلة المماس T لـ (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0 هي: $y=x$.

4) الرسم الموالي يمثل (C_f) والمماس T.



5) من خلال جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أن:

❖ الدالة f تأخذ قيمها من المجال $[-1;1]$، وبما أن $\frac{1}{2}\in[-1;1]$ و f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$، فإن المعادلة $f(x)=\frac{1}{2}$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.

❖ $f(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2\left(e^{2x}-1\right)=e^{2x}+1\Leftrightarrow e^{2x}-3=0$

$$\Leftrightarrow e^{2x}=3>0\Leftrightarrow x=\frac{ln3}{2}.$$

ومنه فإن: $\alpha=\frac{ln3}{2}\simeq 0,55$.

تمّ بحمد الله وتوفيقه