حلول تمارين درس الدوال اللوغاريتمية -الجزء 1-

فهرس حلول التمارين

إيجاد مجموعة تعريف $ln(u(x))$:

حل التمرين 1:

1) $f(x)=ln(2x-5) \Rightarrow 2x-5>0 \Leftrightarrow x>\frac{5}{2}$ $D_f=\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$.

2) $f(x)=ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right) \Rightarrow \begin{cases}\frac{2+x}{2-x}>0\\ 2-x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{2+x}{2-x}>0\\ x\neq 2\end{cases}$. $D_f=]-2;2[$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$2+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{2+x}{2-x}$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

3) $f(x)=ln(x^2+1) \Rightarrow x^2+1>0 \quad (\forall x\in\mathbb{R};x^2\geq 0 \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};x^2+1>0)$ $D_f=\mathbb{R}$.

4) $f(x)=ln(x^2-1) \Rightarrow x^2-1>0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)>0$. $D_f=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

5) $f(x)=ln(x-1)+ln(x-2) \Rightarrow \begin{cases}x-1>0\\ x-2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>1\\ x>2\end{cases}$ $D_f=]2;+\infty[$.

6) $f(x)=\frac{ln(x+1)}{x} \Rightarrow \begin{cases}x+1>0\\ x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>-1\\ x\neq 0\end{cases}$ $D_f=]-1;0[\cup]0;+\infty[$.

7) $f(x)=ln(x^2-4x+3) \Rightarrow x^2-4x+3>0$

❖ $\Delta=4>0 \Rightarrow x_1=1$; $x_2=3$.

❖ $x^2-4x+3>0 \Leftrightarrow x\in]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$ $D_f=]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$.

8) $f(x)=ln(6x^2+4x+1) \Rightarrow 6x^2+4x+1>0$

❖ $\begin{cases}\Delta=-8<0\\ a=6>0\end{cases} \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};6x^2+4x+1>0$ $D_f=\mathbb{R}$.

حل التمرين 2:

1) $f(x)=\frac{1}{ln\,x} \Rightarrow \begin{cases}x>0\\ ln\,x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ x\neq 1\end{cases}$ $D_f=]0;1[\cup]1;+\infty[$.

2) $f(x)=ln(x^2+2x+3) \Rightarrow x^2+2x+3>0$

❖ $\begin{cases}\Delta=-8<0\\ a=1>0\end{cases} \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};x^2+2x+3>0$ $D_f=\mathbb{R}$.

3) $f(x)=x-ln\,x \Rightarrow x>0$ $D_f=]0;+\infty[$.

4) $f(x)=\frac{ln(1+x)}{x^2} \Rightarrow \begin{cases} 1+x>0 \\ x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x\neq 0 \end{cases}$ $D_f =]-1;0[\cup]0;+\infty[$.

5) $f(x)=x+x\,ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=x+x\,ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{x}>0 \\ x\neq 0 \end{cases}$. $D_f =]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$.

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
x	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x+1}{x}$	$+$	0	$-$	||	$+$

6) $f(x)=\frac{ln\,x}{x^4} \Rightarrow x>0$ $D_f =]0;+\infty[$.

حل التمرين 3:

1) $f(x)=ln(4x-3) \Rightarrow 4x-3>0 \Leftrightarrow x>\frac{3}{4}$ $D_f = \left]\frac{3}{4};+\infty\right[$.

2) $f(x)=\frac{ln\left(x+\frac{3}{2}\right)}{x} \Rightarrow \begin{cases} x+\frac{3}{2}>0 \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\frac{3}{2} \\ x\neq 0 \end{cases}$ $D_f = \left]-\frac{3}{2};0\right[\cup]0;+\infty[$.

3) $f(x)=ln\left(-x^2-\frac{13}{2}x-3\right) \Rightarrow -x^2-\frac{13}{2}x-3>0$

❖ $\Delta=121>0 \Rightarrow x_1=-6\ ;\ x_2=-\frac{1}{2}$.

❖ $-x^2-\frac{13}{2}x-3>0 \Leftrightarrow x\in\left]-6;-\frac{1}{2}\right[$ $D_f = \left]-6;-\frac{1}{2}\right[$.

حل التمرين 4:

1) $f(x)=ln(x)+ln(2-x) \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ 2-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<2 \end{cases}$ $D_f =]0;2[$.

2) $f(x)=ln(ln\,x) \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ ln\,x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow x>1$ $D_f =]1;+\infty[$.

3) $f(x)=\sqrt{\frac{ln\,x-1}{ln\,x+1}} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ ln\,x+1\neq 0 \\ \frac{ln\,x-1}{ln\,x+1}\geq 0 \end{cases}$. $D_f = \left]0;\frac{1}{e}\right[\cup[e;+\infty[$.

x	0	$\frac{1}{e}$		e	$+\infty$
$ln\,x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$ln\,x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{ln\,x-1}{ln\,x+1}$	$+$	||	$-$	0	$+$

4) $f(x)=ln\left(x^2+3x-4\right)\Rightarrow x^2+3x-4>0$

❖ $\Delta=25>0\Rightarrow x_1=-4\ ;\ x_2=1$

❖ $x^2+3x-4>0\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;-4\right[\cup\left]1;+\infty\right[$ $D_f=\left]-\infty;-4\right[\cup\left]1;+\infty\right[$.

5) $f(x)=ln\left(4-x^2\right)-ln\,x\Rightarrow\begin{cases}4-x^2>0\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left]-2;2\right[\\x>0\end{cases}$ $D_f=\left]0;2\right[$.

6) $f(x)=ln\left(\dfrac{4-x^2}{x}\right)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{4-x^2}{x}>0\\x\neq 0\end{cases}$. $D_f=\left]-\infty;-2\right[\cup\left]0;2\right[$.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$4-x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{4-x^2}{x}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	

7) $f(x)=ln\left(x^2-4\right)-ln(-x)\Rightarrow\begin{cases}x^2-4>0\\-x>0\end{cases}$. $D_f=\left]-\infty;-2\right[$.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	

حل التمرين 5:

1) $f(x)=2ln(x)-x\Rightarrow x>0$ $D_f=\left]0;+\infty\right[$.

2) $f(x)=ln\left(x^2-4\right)\Rightarrow x^2-4>0$ $D_f=\left]-\infty;-2\right[\cup\left]2;+\infty\right[$.

3) $f(x)=ln\left(x^2\right)\Rightarrow x^2>0\Leftrightarrow x\neq 0$ $D_f=\mathbb{R}^*$.

4) $f(x)=ln(1-2x)\Rightarrow 1-2x>0\Leftrightarrow x<\dfrac{1}{2}$ $D_f=\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right[$.

5) $f(x)=ln(2x+3)\Rightarrow 2x+3>0\Leftrightarrow x>-\dfrac{3}{2}$ $D_f=\left]-\dfrac{3}{2};+\infty\right[$.

6) $f(x)=ln\left(2x^2-x\right)\Rightarrow 2x^2-x>0$

❖ $\Delta=1>0\Rightarrow x_1=0\ ;\ x_2=\dfrac{1}{2}$

❖ $2x^2-x>0\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]0;+\infty\right[$ $D_f=\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]0;+\infty\right[$.

استعمال الخصائص الجبرية لتبسيط عبارة:

حل التمرين 6:

1) $A=ln9-ln3+2ln\sqrt{3}=ln\left(3^2\right)-ln3+2ln\left(3^{\frac{1}{2}}\right)$

$=2ln3-ln3+2\times\dfrac{1}{2}ln3=2ln3-\cancel{ln3}-\cancel{ln3}=2ln3$.

2) $B=ln\left(\frac{1}{2}\right)+ln4=-ln2+ln\left(2^2\right)=-ln2+2ln2=ln2$.

3) $C=ln7+ln49=ln7+ln\left(7^2\right)=ln7+2ln7=3ln7$.

4) $D=ln\left(\frac{2}{5}\right)+ln25=ln2-ln5+ln\left(5^2\right)=ln2-ln5+2ln5=ln2+ln5=ln10$.

5) $E=2lnx-ln(3x)=lnx^2-ln(3x)=ln\left(\frac{x^2}{3x}\right)=ln\left(\frac{x}{3}\right)$.

6) $F=ln\left(x^2+2x+1\right)-ln(x+1)=ln(x+1)^2-ln(x+1)$

$=2ln(x+1)-ln(x+1)=ln(x+1)$.

7) $G=ln\left(\sqrt{2x+3}\right)+ln(2x+3)^3=ln(2x+3)^{\frac{1}{2}}+ln(2x+3)^3$

$=\frac{1}{2}ln(2x+3)+3ln(2x+3)=\frac{7}{2}ln(2x+3)$.

8) $H=2ln\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=2ln\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=2\times\frac{1}{2}ln\left(\frac{2}{3}\right)=ln\left(\frac{2}{3}\right)=ln2-ln3$.

حل التمرين 7:

1) $A=ln\left(\frac{3}{4}\right)+ln\left(\frac{8}{3}\right)-ln\left(2^3\right)=ln\left(\frac{3}{2^2}\right)+ln\left(\frac{2^3}{3}\right)-ln\left(2^3\right)$

$=\cancel{ln3}-ln\left(2^2\right)+\cancel{ln\left(2^3\right)}-\cancel{ln3}-\cancel{ln\left(2^3\right)}=-2ln2$.

2) $B=ln\left(7^{-3}\right)+2ln49=-3ln7+2ln\left(7^2\right)=-3ln7+4ln7=ln7$.

3) $C=ln\sqrt{135}+ln\sqrt{75}-ln\sqrt{15}-ln\sqrt{27}=ln\left(135^{\frac{1}{2}}\right)+ln\left(75^{\frac{1}{2}}\right)-ln\left(15^{\frac{1}{2}}\right)-ln\left(27^{\frac{1}{2}}\right)$

$=\frac{1}{2}ln135+\frac{1}{2}ln75-\frac{1}{2}ln15-\frac{1}{2}ln27=\frac{1}{2}ln\left(\frac{135}{27}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{75}{15}\right)=\frac{1}{2}ln5+\frac{1}{2}ln5=ln5$.

حل التمرين 8:

1) $A=ln\left(\frac{81}{161051}\right)=ln\left(\frac{3^4}{11^5}\right)=ln\left(3^4\right)-ln\left(11^5\right)=4ln3-5ln11$.

2) $A=ln(7503125)=ln\left(5^5\times7^4\right)=ln\left(5^5\right)+ln\left(7^4\right)=5ln5+4ln7$.

3)

a) $A=-4ln(3)+5ln(5)=-ln\left(3^4\right)+ln\left(5^5\right)=ln\left(\frac{5^5}{3^4}\right)=ln\left(\frac{3125}{81}\right)$.

b) $B=3ln(5)+4ln(7)=ln\left(5^3\right)+ln\left(7^4\right)=ln\left(5^3\times7^4\right)=ln(300125)$.

c) $C=\frac{1}{2}ln(25)-2ln(2)=ln\left(\sqrt{25}\right)-ln\left(2^2\right)=ln5-ln4=ln\left(\frac{5}{4}\right)$.

d) $D=\ln(32)+\ln\left(\frac{1}{3}\right)-\ln(2)=\ln(32)-\ln 3-\ln(2)=\ln\left(\frac{32}{3\times 2}\right)=\ln\left(\frac{16}{3}\right)$.

حل التمرين 9:

1) $A=\ln\left(x^{-2}y^{3}\right)=\ln\left(x^{-2}\right)+\ln\left(y^{3}\right)=-2\ln x+3\ln y$.

2) $A=\ln\left(x^{-3}y^{-4}\right)=\ln\left(x^{-3}\right)+\ln\left(y^{-4}\right)=-3\ln x-4\ln y$.

3) $A=-2\ln(x)-4\ln(y)=\ln\left(x^{-2}\right)+\ln\left(y^{-4}\right)=\ln\left(x^{-2}y^{-4}\right)$.

4) $A=-3\ln(x)-5\ln(y)=\ln\left(x^{-3}\right)-\ln\left(y^{5}\right)=\ln\left(\frac{x^{-3}}{y^{5}}\right)$.

حل التمرين 10:

1) $A=\ln 32-5\ln 4+\ln\frac{1}{64}=\ln\left(2^{5}\right)-5\ln\left(2^{2}\right)-\ln\left(2^{6}\right)$

$=5\ln 2-10\ln 2-6\ln 2=-11\ln 2$.

2) $B=2\ln\left(e^{3}\right)-5\ln\left(\frac{1}{e^{4}}\right)=2\ln\left(e^{3}\right)+5\ln\left(e^{4}\right)=6\ln e+20\ln e=26$.

3) $4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^{2}=4\frac{\left(\ln\sqrt{x}\right)^{2}}{x}=4\frac{\left(\ln x^{\frac{1}{2}}\right)^{2}}{x}=4\frac{\left(\frac{1}{2}\ln x\right)^{2}}{x}=4\frac{\frac{1}{4}(\ln x)^{2}}{x}=\frac{(\ln x)^{2}}{x}$.

(4

a) $\ln e^{5}-2\ln e^{2}=5\ln e-4\ln e=\ln e=1$.

b) $3\ln e^{-3}+\frac{1}{2}\ln e^{10}=3\times(-3)\ln e+\left(\frac{1}{2}\times 10\right)\ln e=-9\ln e+5\ln e=-4\ln e=-4$.

حل التمرين 11:

1) $A=\ln\left(e^{5}\right)=5\ln e=5$.

2) $B=\ln\left(e^{2}\sqrt{e}\right)=\ln\left(e^{2}e^{\frac{1}{2}}\right)=\ln\left(e^{\frac{5}{2}}\right)=\frac{5}{2}\ln e=\frac{5}{2}$.

3) $C=\ln\left(\frac{\sqrt{e}}{4}\right)=\ln\left(\sqrt{e}\right)-\ln 4=\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)-\ln\left(2^{2}\right)=\frac{1}{2}\ln e-2\ln 2=\frac{1}{2}-2\ln 2$.

4) $D=\ln\left(\frac{1}{e^{2}}\right)^{3}=3\ln\left(\frac{1}{e^{2}}\right)=-3\ln\left(e^{2}\right)=-6\ln e=-6$.

5) $E=\frac{1}{3}\ln\left(e^{27}\right)=\frac{27}{3}\ln e=9\ln e=9$.

6) $F=e^{2\ln 5}=e^{\ln 5^{2}}=5^{2}=25$.

7) $G=e^{-\ln 3}=e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{3}$.

8) $H=e^{ln(3)-ln(2)}=e^{ln\left(\frac{3}{2}\right)}=\frac{3}{2}$.

9) $I=\frac{e^{ln(5)-ln(3)}}{e^{ln(5)+ln(3)}}=\frac{e^{ln\left(\frac{5}{3}\right)}}{e^{ln(5\times 3)}}=\frac{\frac{5}{3}}{5\times 3}=\frac{\cancel{5}}{3}\times\frac{1}{\cancel{5}\times 3}=\frac{1}{9}$.

حل التمرين 12:

1) $A=2ln3+ln2+ln\frac{1}{2}=ln\left(3^2\right)+\cancel{ln2}-\cancel{ln2}=ln9$.

$B=\frac{1}{2}ln9-2ln3=ln\left(9^{\frac{1}{2}}\right)-2ln3=ln\left(\sqrt{9}\right)-2ln3=ln3-2ln3=-ln3=ln\left(\frac{1}{3}\right)$.

(2

a) $\begin{cases} x=3ln2=ln\left(2^3\right)=ln8 \\ y=2ln3=ln\left(3^2\right)=ln9 \end{cases}\Rightarrow x<y$.

b) $\begin{cases} x=ln5-ln2=ln\left(\frac{5}{2}\right) \\ y=ln12-ln5=ln\left(\frac{12}{5}\right) \end{cases}\Rightarrow x>y$.

حل التمرين 13:

❖ $A=ln\left(e^{-5}\right)+3e^{ln5}=-5lne+3\times 5=-5+15=10$.

❖ $B=\frac{1}{2}ln\left(e^{0,5}\right)-ln\left(e^{-4}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}lne+4lne=\frac{1}{4}+4=\frac{17}{4}$.

❖ $C=e^{\frac{1}{2}ln(8)+1}=e^{ln\left(\sqrt{8}\right)+lne}=e^{ln\left(e\sqrt{8}\right)}=e\sqrt{8}=2e\sqrt{2}$.

❖ $D=\frac{e^{2+ln2}}{e^{1-ln2}}=e^{2+ln2-(1-ln2)}=e^{2+ln2-1+ln2}=e^{1+2ln2}=e^{lne+ln\left(2^2\right)}=e^{ln(4e)}=4e$.

❖ $E=\frac{e^{2ln3}}{e^{3ln2}}=e^{2ln3-3ln2}=e^{ln\left(3^2\right)-ln\left(2^3\right)}=e^{ln\left(\frac{3^2}{2^3}\right)}=e^{ln\left(\frac{9}{8}\right)}=\frac{9}{8}$.

حل التمرين 14:

❖ $A=ln\left(\frac{e^5}{e^3}\right)=ln\left(e^{5-3}\right)=ln\left(e^2\right)=2lne=2$.

❖ $B=ln\sqrt{e}-ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)+ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=2ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=2\times\frac{1}{2}lne=1$.

❖ $C=ln\left(\frac{e^3}{5}\right)+ln5=ln\left(e^3\right)-\cancel{ln5}+\cancel{ln5}=3lne=3$.

❖ $D=2\ln 7-\ln\left(\frac{49}{e^3}\right)=\ln\left(7^2\right)-\left(\ln 49-\ln\left(e^3\right)\right)=\ln 49-\ln 49+3\ln e=3$.

❖ $E=e^{\ln 3+1}=e^{\ln 3+\ln e}=e^{\ln(3e)}=3e$.

❖ $F=e^{\ln 3-\ln 2}=e^{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}=\frac{3}{2}$.

❖ $G=2\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+\ln\left(-2\sqrt{2}+3\right)=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)^2+\ln\left(-2\sqrt{2}+3\right)$

$=\ln\left(2+2\sqrt{2}+1\right)+\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)=\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)+\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)$

$=\ln\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)\right]=\ln\left(3^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2\right)=\ln(9-8)=\ln 1=0$

❖ $H=\ln\left(\sqrt{7}\right)+\ln\left(2\sqrt{7}+\frac{3}{\sqrt{7}}\right)=\ln\left(\sqrt{7}\left(2\sqrt{7}+\frac{3}{\sqrt{7}}\right)\right)=\ln(2\times 7+3)=\ln 17$.

حل التمرين 15:

a)

❖ $\forall x\in\mathbb{R};e^x>0\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R};e^x+1>0$

❖ $\forall x\in\mathbb{R};e^{-x}>0\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R};1+e^{-x}>0$

❖ $\ln\left(1+e^{-x}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)=\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)=\ln\left(e^x+1\right)-\ln\left(e^x\right)$

$=\ln\left(e^x+1\right)-x\ln e=\ln\left(e^x+1\right)-x$.

❖ نستنتج أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، $\ln\left(e^x+1\right)-x=\ln\left(1+e^{-x}\right)$.

b)

❖ $\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)\Rightarrow\begin{cases}e^x-1\neq 0\\ \frac{e^x+1}{e^x-1}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e^x\neq 1\\ \frac{e^x+1}{e^x-1}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ \frac{e^x+1}{e^x-1}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ e^x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow x>0$.

❖ $\ln\left(\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)\Rightarrow\begin{cases}1-e^{-x}\neq 0\\ \frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x\neq 0\\ 1-e^{-x}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ e^{-x}<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ -x<0\end{cases}\Leftrightarrow x>0$.

❖ $\ln\left(\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)=\ln\left(\frac{1+\frac{1}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}}\right)=\ln\left(\frac{\frac{e^x+1}{e^x}}{\frac{e^x-1}{e^x}}\right)=\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)$.

❖ نستنتج أنه من أجل كل $x\in\left]0;+\infty\right[$، $\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)=\ln\left(\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)$.

حل التمرين 16:

1) $f(x)=2\ln x+\ln(1-x)-\ln 2 \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ 1-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<1 \end{cases} \quad D_f =]0;1[$.

2) $\forall x \in D_f ; f(x)=2\ln x+\ln(1-x)-\ln 2=\ln(x^2)+\ln(1-x)-\ln 2=\ln\left(\frac{x^2(1-x)}{2}\right)$.

❖ نستنتج أنه من أجل كل $x\in]0;1[$ ، $f(x)=\ln[u(x)]$ مع كون: $u(x)=\frac{x^2(1-x)}{2}$.

حل معادلة من الشكل $\ln(u(x))=\ln(v(x))$:

حل التمرين 17:

1) $D=\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$. $\forall x\in D;\ln(2x+1)=\ln(3x-4)\Leftrightarrow 2x+1=3x-4\Leftrightarrow x=5$. $S=\{5\}$.

2) $D=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$. $\forall x\in D;\ln(x^2+1)=\ln(2x^2-2)\Leftrightarrow x^2+1=2x^2-2$

$\Leftrightarrow x^2=3\Leftrightarrow x_1=-\sqrt{3}\ ;\ x_2=\sqrt{3}$ $\quad S=\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$.

3) $D=]-7;+\infty[$. $\forall x\in D;\ln(x+7)=\ln 4\Leftrightarrow x+7=4\Leftrightarrow x=-3$. $\quad S=\{-3\}$.

4) $D=]-\infty;-2[\cup\left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$. $\forall x\in D;\ln\left(\frac{3x+1}{x+2}\right)=\ln 4$.

$\Leftrightarrow \frac{3x+1}{x+2}=4\Leftrightarrow 3x+1=4x+8\Leftrightarrow x=-7$. $\quad S=\{-7\}$.

5) $D=\left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$. $\forall x\in D;\ln(3x+1)+\ln(2x+1)=\ln(x+1)$

$\Leftrightarrow \ln[(3x+1)(2x+1)]=\ln(x+1)\Leftrightarrow \ln[6x^2+5x+1]=\ln(x+1)\Leftrightarrow 6x^2+5x+1=x+1$

$\Leftrightarrow 6x^2+4x=0\Leftrightarrow x(6x+4)=0\Leftrightarrow x=0\ ;\ x=-\frac{2}{3}\notin D$. $S=\{0\}$.

6) $D=]1;+\infty[$. $\forall x\in D;\ln(x^2-1)-\ln(x+1)=\ln 3\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right)=\ln 3$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x+1}=3\Leftrightarrow \frac{x^2-1-3(x+1)}{x+1}=0\Leftrightarrow \frac{x^2-3x-4}{x+1}=0\Leftrightarrow x^2-3x-4=0$.

$\Delta=25>0\Rightarrow x_1=-1\notin D\ ;\ x_2=4$. $\quad S=\{4\}$.

7) $D=]1;+\infty[$. $\forall x\in D;\frac{1}{2}\ln(x-1)=\ln 6\Leftrightarrow \ln(x-1)^{\frac{1}{2}}=\ln 6$

$\Leftrightarrow \ln(\sqrt{x-1})=\ln 6\Leftrightarrow \sqrt{x-1}=6\Leftrightarrow x-1=6^2\Leftrightarrow x=37$. $\quad S=\{37\}$.

8) $D=]-3;-2[\cup]-2;+\infty[$. $\forall x\in D;\frac{1}{\ln(x+3)}=\frac{1}{\ln 5}\Leftrightarrow \ln(x+3)=\ln 5$

$\Leftrightarrow x+3=5\Leftrightarrow x=2$. $\quad S=\{2\}$.

حل التمرين 18:

1) $D=\left]-\frac{2}{5};+\infty\right[$. $\forall x\in D; ln(2+5x)=ln(x+6)\Leftrightarrow 2+5x=x+6$

$\Leftrightarrow 4x=4\Leftrightarrow x=1$. $S=\{1\}$.

2) $D=]3;+\infty[$. $\forall x\in D; ln(x-1)+ln(x-3)=ln3\Leftrightarrow ln[(x-1)(x-3)]=ln3$

$\Leftrightarrow ln[x^2-4x+3]=ln3\Leftrightarrow x^2-4x+3=3\Leftrightarrow x(x-4)=0\Leftrightarrow x=0\notin D\ ;\ x=4$

$S=\{4\}$.

3) $D=]1;+\infty[$. $\forall x\in D; ln(x-1)=ln(2x-1)\Leftrightarrow x-1=2x-1\Leftrightarrow x=0\notin D$ $S=\varnothing$.

4) $x\in D\Rightarrow\begin{cases}x-1\neq 0\\2x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow D=\left]\frac{1}{2};1\right[\cup]1;+\infty[$.

$\forall x\in D; ln(|x-1|)=ln(2x-1)\Leftrightarrow |x-1|=2x-1$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=2x-1\\1-x=2x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\notin D\\x=\frac{2}{3}\end{cases}$ $S=\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

5) $x\in D\Rightarrow\begin{cases}x-1\neq 0\\2x-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2};1\right\}$.

$\forall x\in D; ln(|x-1|)=ln(|2x-1|)\Leftrightarrow |x-1|=|2x-1|$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=2x-1\\1-x=2x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\x=\frac{2}{3}\end{cases}$ $S=\left\{0;\frac{2}{3}\right\}$.

6) $D=]32;+\infty[$. $\forall x\in D; ln(x-2)+ln(x-32)=6ln2\Leftrightarrow ln[(x-2)(x-32)]=ln(2^6)$

$\Leftrightarrow ln[x^2-34x-64]=ln(64)\Leftrightarrow x^2-34x-64=64\Leftrightarrow x^2-34x=0$

$\Leftrightarrow x(x-34)=0\Leftrightarrow x=0\notin D\ ;\ x=34$. $S=\{34\}$.

7) $x\in D\Leftrightarrow(x-2)(x-32)>0\Leftrightarrow D=]-\infty;2[\cup]32;+\infty[$.

$\forall x\in D; ln[(x-2)(x-32)]=6ln2\Leftrightarrow ln[x^2-34x-64]=ln(64)$

$\Leftrightarrow x^2-34x-64=64\Leftrightarrow x^2-34x=0\Leftrightarrow x(x-34)=0\Leftrightarrow x=0\ ;\ x=34$

$S=\{0;34\}$.

8) $D=\left]\frac{9}{4};\frac{7}{2}\right[$. $\forall x\in D; ln(7-2x)-ln(4x-9)=-ln3\Leftrightarrow ln(7-2x)+ln3=ln(4x-9)$

$\Leftrightarrow ln[3(7-2x)]=ln(4x-9)\Leftrightarrow ln(21-6x)=ln(4x-9)$

$\Leftrightarrow 21-6x=4x-9\Leftrightarrow x=3$. $S=\{3\}$.

9) $D=]1;+\infty[$. $\forall x\in D; ln(x^2-1)=ln(4x-1)-2ln2$

$\Leftrightarrow ln\left(x^2-1\right)+ln\left(2^2\right)=ln(4x-1)\Leftrightarrow ln\left[4\left(x^2-1\right)\right]=ln(4x-1)$

$\Leftrightarrow 4x^2-4=4x-1\Leftrightarrow 4x^2-4x-3=0$

$\Delta=64>0\Rightarrow x_1=-\frac{1}{2}\notin D\ ;\ x_2=\frac{3}{2}.\qquad S=\left\{\frac{3}{2}\right\}.$

10) $D=]0;+\infty[.\quad \forall x\in D;e^{1+ln\,x}=ln2\Leftrightarrow e^{ln\,e+ln\,x}=ln2$

$\Leftrightarrow e^{ln(ex)}=ln2\Leftrightarrow ex=ln2\Leftrightarrow x=\frac{ln2}{e}\qquad S=\left\{\frac{ln2}{e}\right\}.$

حل التمرين 19:

1) $D=\left]-1;\frac{1}{2}\right[.\quad \forall x\in D;ln(1+x)=ln(1-2x)\Leftrightarrow 1+x=1-2x\Leftrightarrow x=0.\ S=\{0\}.$

2) $D=]-3;3[.\quad \forall x\in D;ln(3+x)+ln(3-x)=ln5\Leftrightarrow ln[(3+x)(3-x)]=ln5$

$\Leftrightarrow ln\left(x^2-9\right)=ln5\Leftrightarrow x^2-9=5\Leftrightarrow x^2=14$

$\Leftrightarrow x_1=-\sqrt{14}\notin D\ ;\ x_2=\sqrt{14}\notin D.\quad S=\varnothing.$

3) $D=]-1;+\infty[.\quad \forall x\in D;ln(3+x)-ln(x+13)+ln(x+1)=0$

$\Leftrightarrow ln(3+x)+ln(x+1)=ln(x+13)\Leftrightarrow ln[(3+x)(x+1)]=ln(x+13)$

$\Leftrightarrow ln\left(x^2+4x+3\right)=ln(x+13)\Leftrightarrow x^2+4x+3=x+13\Leftrightarrow x^2+3x-10=0$

$\Delta=49>0\Rightarrow x_1=-5\notin D\ ;\ x_2=2.\qquad S=\{2\}.$

4) $D=\left]-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[.\quad \forall x\in D;ln(2x+1)=ln(3-2x)\Leftrightarrow 2x+1=3-2x\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$

$S=\left\{\frac{1}{2}\right\}.$

5) $D=\left]-2;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[.\quad \forall x\in D;ln\left(4x^2-1\right)=ln(x+2)$

$\Leftrightarrow 4x^2-1=x+2\Leftrightarrow 4x^2-x-3=0.\qquad \Delta=49>0\Rightarrow x_1=-\frac{3}{4}\ ;\ x_2=1$

$S=\left\{-\frac{3}{4};1\right\}.$

6) $D=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[.\quad \forall x\in D;ln(2x-1)+ln(2x+1)=ln(x+2)$

$\Leftrightarrow ln[(2x-1)(2x+1)]=ln(x+2)$

$\Leftrightarrow ln\left(4x^2-1\right)=ln(x+2)\Leftrightarrow 4x^2-1=x+2\Leftrightarrow 4x^2-x-3=0$

$\Delta=49>0\Rightarrow x_1=-\frac{3}{4}\notin D\ ;\ x_2=1.\qquad S=\{1\}.$

7) $D=]1;+\infty[.\quad \forall x\in D;ln(x-1)-ln(3x+4)=ln(5x)$

$\Leftrightarrow ln(x-1)=ln(5x)+ln(3x+4)\Leftrightarrow ln(x-1)=ln[(5x)(3x+4)]$

$\Leftrightarrow ln(x-1)=ln(15x^2+20x) \Leftrightarrow x-1=15x^2+20x \Leftrightarrow 15x^2+19x+1=0$.

$\Delta=301>0 \Rightarrow x_1=\dfrac{-19-\sqrt{301}}{30}\notin D\ ;\ x_2=\dfrac{-19+\sqrt{301}}{30}\notin D$. $S=\varnothing$.

8) $D=]4;+\infty[$. $\forall x\in D; 2ln(x-4)=ln x-2ln2 \Leftrightarrow ln(x-4)^2=ln x-ln4$

$\Leftrightarrow ln(x-4)^2=ln\left(\dfrac{x}{4}\right) \Leftrightarrow (x-4)^2=\dfrac{x}{4} \Leftrightarrow 4x^2-33x+64=0$.

$\Delta=65>0 \Rightarrow x_1=\dfrac{33-\sqrt{65}}{8}\notin D\ ;\ x_2=\dfrac{33+\sqrt{65}}{8}$ $S=\left\{\dfrac{33+\sqrt{65}}{8}\right\}$.

9) $D=]-1;+\infty[$. $\forall x\in D; ln(x+4)+ln(x+1)=ln6 \Leftrightarrow ln[(x+4)(x+1)]=ln6$

$\Leftrightarrow (x+4)(x+1)=6 \Leftrightarrow x^2+5x-2=0$

$\Delta=33>0 \Rightarrow x_1=\dfrac{-5-\sqrt{33}}{2}\notin D\ ;\ x_2=\dfrac{-5+\sqrt{33}}{2}$ $S=\left\{\dfrac{-5+\sqrt{33}}{2}\right\}$.

10) $D=\mathbb{R}\setminus\{-4;-1\}$. $\forall x\in D; ln(|x+4|)+ln(|x+1|)=ln6$

$\Leftrightarrow ln[|x+4|\times|x+1|]=ln6 \Leftrightarrow |x+4|\times|x+1|=6 \Leftrightarrow \begin{cases}(x+4)(x+1)=6\\(x+4)(x+1)=-6\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+5x-2=0\\x^2+5x+10=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta_1=33>0 \Rightarrow x_1=\dfrac{-5-\sqrt{33}}{2}\ ;\ x_2=\dfrac{-5+\sqrt{33}}{2}\\ \Delta_2<0 \Rightarrow S=\varnothing\end{cases}$

$S=\left\{\dfrac{-5-\sqrt{33}}{2};\dfrac{-5+\sqrt{33}}{2}\right\}$.

حل التمرين 20:

1) $D=\left]-\dfrac{3}{2};+\infty\right[$. $\forall x\in D; ln(2x+3)=ln7 \Leftrightarrow 2x+3=7 \Leftrightarrow x=2$. $S=\{2\}$.

$D=]\sqrt{5};+\infty[$. $\forall x\in D; ln(x^2-5)=ln(7x-15) \Leftrightarrow x^2-5=7x-15$

$\Leftrightarrow x^2-7x+10=0$. $\Delta=9>0 \Rightarrow x_1=2\notin D\ ;\ x_2=5$ $S=\{5\}$.

2) $D=]0;+\infty[$. $\forall x\in D; ln\left(\dfrac{2}{x}\right)=ln x \Leftrightarrow \dfrac{2}{x}=x \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x^2-2=0$

$\Leftrightarrow (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0 \Leftrightarrow x=-\sqrt{2}\notin D\ ;\ x=\sqrt{2}$. $S=\{\sqrt{2}\}$.

3) $D=]3;4[$. $\forall x\in D; ln(x^2-4x+3)=ln(-x^2+6x-8)$

$\Leftrightarrow x^2-4x+3=-x^2+6x-8 \Leftrightarrow 2x^2-10x+11=0$.

$\Delta=12>0 \Rightarrow x_1=\dfrac{5-\sqrt{3}}{2}\notin D\ ;\ x_2=\dfrac{5+\sqrt{3}}{2}$. $S=\left\{\dfrac{5+\sqrt{3}}{2}\right\}$.

4) $D=]-2;+\infty[$. $\forall x\in D; ln(x+3)+ln(x+2)=ln(x+11)$

$\Leftrightarrow ln\left[(x+3)(x+2)\right]=ln(x+11) \Leftrightarrow (x+3)(x+2)=x+11$

$\Leftrightarrow x^2+5x+6=x+11 \Leftrightarrow x^2+4x-5=0$

$\Delta=36>0 \Rightarrow x_1=-5 \notin D \;;\; x_2=1.$ $S=\{1\}.$

5) $D=]-11;-3[\cup]-2;+\infty[.$ $\forall x\in D; ln\left(x^2+5x+6\right)=ln(x+11)$

$\Leftrightarrow x^2+5x+6=x+11 \Leftrightarrow x^2+4x-5=0.$ $\Delta=36>0 \Rightarrow x_1=-5 \;;\; x_2=1$

$S=\{-5;1\}.$

حل التمرين 21:

1) $A(x)=(x-1)(x+1)(x-2)=\left(x^2-1\right)(x-2)=x^3-2x^2-x+2.$

(2

a) $D=\left]\sqrt[3]{-2};-\frac{1}{2}\right[\cup]0;+\infty[.$ $\forall x\in D; ln\left(x^3+2\right)=ln\left(2x^2+x\right) \Leftrightarrow x^3+2=2x^2+x$

$\Leftrightarrow x^3-2x^2-x+2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x-2)=0 \Leftrightarrow x=1 \;;\; x=-1 \;;\; x=2.$

$S=\{-1;1;2\}.$

b) $\forall x\in\mathbb{R}; |x|>0 \;;\; \forall x\in\mathbb{R}; x^2>0 \;;\; \forall x\in\mathbb{R}; |x|^3>0 \Rightarrow D=\mathbb{R}.$

$ln\left(|x|^3+2\right)=ln\left(2x^2+|x|\right).$

❖ نضع: $\begin{cases} X=|x| \\ X\geq 0 \end{cases}$، فنتحصل على $ln\left(X^3+2\right)=ln\left(2X^2+X\right)$.

❖ من خلال السؤال السابق تحصلنا على $X=2 \;;\; X=-1 \;;\; X=1$. وبما أن: $X\geq 0$ فإن: $X=-1$ غير مقبولة.

❖ $\begin{cases} X=|x|=1 \Rightarrow x=1 \;;\; x=-1 \\ X=|x|=2 \Rightarrow x=2 \;;\; x=-2 \end{cases}.$ $S=\{-1;-2;1;2\}.$

c) $D=\left]-\sqrt{3};1\right[\cup\left]\sqrt{3};+\infty\right[.$ $\forall x\in D; ln\left(x^3-x^2-3x+3\right)=ln\left(x^2-2x+1\right).$

$\Leftrightarrow x^3-x^2-3x+3=x^2-2x+1 \Leftrightarrow x^3-2x^2-x+2=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x-2)=0 \Leftrightarrow x=1\notin D \;;\; x=-1 \;;\; x=2.$

$S=\{-1;2\}.$

d) $D=]-\infty;1[.$ $\forall x\in D; ln\left(x^3-x^2-3x+3\right)=2ln(1-x)$

$\Leftrightarrow ln\left(x^3-x^2-3x+3\right)=ln(1-x)^2 \Leftrightarrow x^3-x^2-3x+3=(1-x)^2$

$\Leftrightarrow x^3-x^2-3x+3=1-2x+x^2 \Leftrightarrow x^3-2x^2-x+2=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x-2)=0 \Leftrightarrow x=1\notin D \;;\; x=-1 \;;\; x=2\notin D.$ $S=\{-1\}.$

حل التمرين 22:

1) $D=\left]-\frac{11}{5};+\infty\right[$. $\forall x\in D; ln(5x+11)=2+ln5 \Leftrightarrow ln(5x+11)=ln(e^2)+ln5$

$\Leftrightarrow ln(5x+11)=ln(5e^2) \Leftrightarrow 5x+11=5e^2 \Leftrightarrow x=\frac{5e^2-11}{5}=e^2-\frac{11}{5}$.

$S=\left\{e^2-\frac{11}{5}\right\}$.

2) $D=\left]-\infty;\frac{7}{2}\right[$. $\forall x\in D; ln(7-2x)=ln2-4 \Leftrightarrow ln(7-2x)=ln2+ln(e^{-4})$

$\Leftrightarrow ln(7-2x)=ln(2e^{-4}) \Leftrightarrow ln(7-2x)=ln\left(\frac{2}{e^4}\right) \Leftrightarrow 7-2x=\frac{2}{e^4} \Leftrightarrow x=\frac{7}{2}-\frac{1}{e^4}$.

$S=\left\{\frac{7}{2}-\frac{1}{e^4}\right\}$.

حل معادلة من الشكل $ln(u(x))=k$:

حل التمرين 23:

1) $D=]-6;+\infty[$. $\forall x\in D; ln(2x+12)=1 \Leftrightarrow ln(2x+12)=ln e$

$\Leftrightarrow 2x+12=e \Leftrightarrow x=\frac{e-12}{2}$. $S=\left\{\frac{e-12}{2}\right\}$.

2) $D=]-\infty;4[$. $\forall x\in D; ln(4-x)=4 \Leftrightarrow ln(4-x)=ln(e^4)$

$\Leftrightarrow 4-x=e^4 \Leftrightarrow x=4-e^4$. $S=\{4-e^4\}$.

3) $D=\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[\cup\left]\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right[$. $\forall x\in D; \frac{1}{ln(2-3x)}=3 \Leftrightarrow ln(2-3x)=\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow 2-3x=e^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x=\frac{2-e^{\frac{1}{3}}}{3}$. $S=\left\{\frac{2-e^{\frac{1}{3}}}{3}\right\}$.

4) $D=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$. $\forall x\in D; ln(x^2-1)=2 \Leftrightarrow ln(x^2-1)=ln(e^2)$

$\Leftrightarrow x^2-1=e^2 \Leftrightarrow x^2=e^2+1 \Leftrightarrow x=\sqrt{e^2+1}\ ;\ x=-\sqrt{e^2+1}$. $S=\left\{-\sqrt{e^2+1};\sqrt{e^2+1}\right\}$.

5) $D=]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$. $\forall x\in D; ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)=2 \Leftrightarrow ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)=ln(e^2)$

$\Leftrightarrow \frac{x+2}{x-1}=e^2 \Leftrightarrow x+2=e^2(x-1) \Leftrightarrow x-e^2x=-2-e^2$

$\Leftrightarrow x(1-e^2)=-2-e^2 \Leftrightarrow x=\frac{-2-e^2}{1-e^2}=\frac{2+e^2}{e^2-1}$. $S=\left\{\frac{2+e^2}{e^2-1}\right\}$.

6) $D=]-\infty;-1[$. $\forall x\in D; ln(-x-1)=-3 \Leftrightarrow ln(-x-1)=ln(e^{-3})$

$\Leftrightarrow -x-1=e^{-3} \Leftrightarrow x=-e^{-3}-1$. $S=\{-e^{-3}-1\}$.

حل التمرين 24:

1) $D=\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$. $\forall x\in D; ln(2x-5)=1 \Leftrightarrow ln(2x-5)=ln\,e \Leftrightarrow 2x-5=e \Leftrightarrow x=\frac{e+5}{2}$.

$S=\left\{\frac{e+5}{2}\right\}$.

2) $D=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$. $\forall x\in D; ln(2x-1)=3 \Leftrightarrow ln(2x-1)=ln(e^3)$

$\Leftrightarrow 2x-1=e^3 \Leftrightarrow x=\frac{e^3+1}{2}$. $S=\left\{\frac{e^3+1}{2}\right\}$.

3) $D=]1;+\infty[$. $\forall x\in D; ln\left(\frac{1}{x-1}\right)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1}=e \Leftrightarrow x-1=\frac{1}{e}$

$\Leftrightarrow x-1=e^{-1} \Leftrightarrow x=e^{-1}+1$. $S=\left\{e^{-1}+1\right\}$.

4) $D=\mathbb{R}^*$. $\forall x\in D; ln(x^2)=4 \Leftrightarrow x^2=e^4 \Leftrightarrow x=e^2\ ;\ x=-e^2$. $S=\left\{-e^2;e^2\right\}$.

5) $D=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup]1;+\infty[$. $\forall x\in D; ln\left(\frac{x-1}{2x-1}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{2x-1}=1$

$\Leftrightarrow x-1=2x-1 \Leftrightarrow x=0$. $S=\{0\}$.

6) $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2};1\right\}$. $\forall x\in D; ln\left(\left|\frac{x-1}{2x-1}\right|\right)=0 \Leftrightarrow \left|\frac{x-1}{2x-1}\right|=1$

$\Leftrightarrow \frac{x-1}{2x-1}=1\ ;\ \frac{x-1}{2x-1}=-1$.

- ❖ $\frac{x-1}{2x-1}=1 \Leftrightarrow x-1=2x-1 \Leftrightarrow x=0$
- ❖ $\frac{x-1}{2x-1}=-1 \Leftrightarrow x-1=1-2x \Leftrightarrow 3x=2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$. $S=\left\{0;\frac{2}{3}\right\}$.

حل معادلة تتضمن الدالة اللوغاريتمية:

حل التمرين 25:

1) $D=\left]-\frac{5}{8};+\infty\right[$. $\forall x\in D; (x-2)ln(8x+5)=0 \Leftrightarrow x-2=0\ ;\ ln(8x+5)=0$

$\Leftrightarrow x=2\ ;\ 8x+5=1 \Leftrightarrow x=2\ ;\ x=-\frac{1}{2}$. $S=\left\{-\frac{1}{2};0\right\}$.

2) $D=]3;+\infty[$. $\forall x\in D; x^2 ln(x-3)=0 \Leftrightarrow x^2=0\ ;\ ln(x-3)=0$

$\Leftrightarrow x=0\notin D\ ;\ x-3=1 \Leftrightarrow x=4$. $S=\{4\}$.

3) $D=]-1;+\infty[$. $\forall x\in D; (x+1)ln(x+1)=0 \Leftrightarrow x+1=0\ ;\ ln(x+1)=0$

$\Leftrightarrow x=-1\notin D\ ;\ x+1=1 \Leftrightarrow x=0$. $S=\{0\}$.

4) $D=]0;+\infty[$. $\forall x\in D; (ln\,x-2)(ln\,x+2)=0 \Leftrightarrow ln\,x-2=0\ ;\ ln\,x+2=0$

$\Leftrightarrow ln\,x=2\ ;\ ln\,x=-2 \Leftrightarrow x=e^2\ ;\ x=e^{-2}$. $S=\left\{e^{-2};e^2\right\}$.

5) $D=]-\infty;3[$. $\forall x\in D; x\ln(3-x)+3\ln(3-x)=0 \Leftrightarrow (x+3)\ln(3-x)=0$

$\Leftrightarrow x+3=0\ ;\ \ln(3-x)=0 \Leftrightarrow x=-3\ ;\ 3-x=1 \Leftrightarrow x=-3\ ;\ x=2$. $S=\{-3;2\}$.

6) $D=]-4;+\infty[$. $\forall x\in D; 2\ln\left(\sqrt{x+4}\right)+x^2\ln(x+4)=0$

$\Leftrightarrow \ln\left(\sqrt{x+4}\right)^2+x^2\ln(x+4)=0 \Leftrightarrow \ln(x+4)+x^2\ln(x+4)=0 \Leftrightarrow \left(1+x^2\right)\ln(x+4)=0$

$\Leftrightarrow 1+x^2=0\ ;\ \ln(x+4)=0 \Leftrightarrow x^2=-1\left(\forall x\in\mathbb{R}; x^2>0\right)\ ;\ x+4=1 \Leftrightarrow x=-3$

$S=\{-3\}$.

7) $D=]0;+\infty[$. $\forall x\in D; \dfrac{\ln x}{x}=0 \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1$. $S=\{1\}$.

8) $D=]0;e[\cup]e;+\infty[$. $\forall x\in D; \dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}=0 \Leftrightarrow \ln x+1=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=e^{-1}$

$S=\left\{e^{-1}\right\}$.

9) $D=]-3;+\infty[$. $\forall x\in D; (x+5)\ln(x+3)=0 \Leftrightarrow x+5=0\ ;\ \ln(x+3)=0$

$\Leftrightarrow x=-5\notin D\ ;\ x+3=1 \Leftrightarrow x=-2$. $S=\{-2\}$.

10) $D=\left]-\infty;\dfrac{3-3\sqrt{5}}{2}\right[\cup\left]\dfrac{3+3\sqrt{5}}{2};+\infty\right[$. $\forall x\in D; (5-x)\ln\left(x^2-3x-9\right)=0$

$\Leftrightarrow 5-x=0\ ;\ \ln\left(x^2-3x-9\right)=0 \Leftrightarrow x=5\ ;\ x^2-3x-9=1 \Leftrightarrow x=5\ ;\ x^2-3x-10=0$.

$\Delta=49>0 \Rightarrow x_1=-2\ ;\ x_2=5$. $S=\{-2;5\}$.

حل معادلة من الشكل $a(\ln x)^2+b\ln x+c=0$:

حل التمرين 26:

1) $D=]0;+\infty[$. $\forall x\in D; (\ln x)^2+6\ln x+9=0 \Leftrightarrow \begin{cases} X=\ln x \\ X^2+6X+9=0 \end{cases}$

$\Delta=0 \Rightarrow X_0=-3$. $X=\ln x=-3 \Leftrightarrow x=e^{-3}$. $S=\left\{e^{-3}\right\}$.

2) $D=]0;+\infty[$. $\forall x\in D; (\ln x)^2-3\ln x+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} X=\ln x \\ X^2-3X+2=0 \end{cases}$

$\Delta=1>0 \Rightarrow X_1=1\ ;\ X_2=2$. $\begin{cases} X=\ln x=1 \Leftrightarrow x=e \\ X=\ln x=2 \Leftrightarrow x=e^2 \end{cases}$. $S=\left\{e;e^2\right\}$.

3) $D=]0;+\infty[$. $\forall x\in D; 2(\ln x)^2+\ln x+3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} X=\ln x \\ 2X^2+X+3=0 \end{cases}$

$\Delta=-23<0$. $S=\varnothing$.

4) $D=]0;+\infty[$. $\forall x\in D; (\ln x)^2+2\ln x-35=0 \Leftrightarrow \begin{cases} X=\ln x \\ X^2+2X-35=0 \end{cases}$

$\Delta=144>0\Rightarrow X_1=-7\ ;\ X_2=5.\ \begin{cases}X=\ln x=-7\Leftrightarrow x=e^{-7}\\X=\ln x=5\Leftrightarrow x=e^{5}\end{cases}.\quad S=\left\{e^{-7};e^{5}\right\}.$

5) $D=]0;+\infty[.\quad \forall x\in D;(\ln x)^2-\sqrt{2}\ln x-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow\begin{cases}X=\ln x\\X^2-\sqrt{2}X-\frac{1}{2}=0\end{cases}$

$\Delta=4>0\Rightarrow X_1=\frac{\sqrt{2}-2}{2}\ ;\ X_2=\frac{\sqrt{2}+2}{2}.$

$\begin{cases}X=\ln x=\frac{\sqrt{2}-2}{2}\Leftrightarrow x=e^{\frac{\sqrt{2}-2}{2}}\\X=\ln x=\frac{\sqrt{2}+2}{2}\Leftrightarrow x=e^{\frac{\sqrt{2}+2}{2}}\end{cases}.\quad S=\left\{e^{\frac{\sqrt{2}-2}{2}};e^{\frac{\sqrt{2}+2}{2}}\right\}.$

6) $D=]0;+\infty[.\quad \forall x\in D;(\ln x)^2+9\ln x+18=0\Leftrightarrow\begin{cases}X=\ln x\\X^2+9X+18=0\end{cases}$

$\Delta=9>0\Rightarrow X_1=-6\ ;\ X_2=-3.\ \begin{cases}X=\ln x=-6\Leftrightarrow x=e^{-6}\\X=\ln x=-3\Leftrightarrow x=e^{-3}\end{cases}.\quad S=\left\{e^{-6};e^{-3}\right\}.$

7) $D=]0;+\infty[.\quad \forall x\in D;(\ln x)^2+\ln x-20=0\Leftrightarrow\begin{cases}X=\ln x\\X^2+X-20=0\end{cases}$

$\Delta=81>0\Rightarrow X_1=-5\ ;\ X_2=4.\ \begin{cases}X=\ln x=-5\Leftrightarrow x=e^{-5}\\X=\ln x=4\Leftrightarrow x=e^{4}\end{cases}.\quad S=\left\{e^{-5};e^{4}\right\}.$

8) $D=]0;+\infty[.\quad \forall x\in D;-3(\ln x)^2+19\ln x+14=0\Leftrightarrow\begin{cases}X=\ln x\\-3X^2+19X+14=0\end{cases}$

$\Delta=529>0\Rightarrow X_1=7\ ;\ X_2=-\frac{2}{3}.\ \begin{cases}X=\ln x=7\Leftrightarrow x=e^{7}\\X=\ln x=-\frac{2}{3}\Leftrightarrow x=e^{\frac{-2}{3}}\end{cases}.\quad S=\left\{e^{\frac{-2}{3}};e^{7}\right\}.$

حل التمرين 27:

1) $D=]0;+\infty[.\quad \forall x\in D;(\ln x)^2-\ln x-6=0\Leftrightarrow\begin{cases}X=\ln x\\X^2-X-6=0\end{cases}$

$\Delta=25>0\Rightarrow X_1=-2\ ;\ X_2=3.\ \begin{cases}X=\ln x=-2\Leftrightarrow x=e^{-2}\\X=\ln x=3\Leftrightarrow x=e^{3}\end{cases}.\quad S=\left\{e^{-2};e^{3}\right\}.$

2) $D=]0;+\infty[.\quad \forall x\in D;(\ln x)^2+\ln x-6=0\Leftrightarrow\begin{cases}X=\ln x\\X^2+X-6=0\end{cases}$

$\Delta=25>0\Rightarrow X_1=-3\ ;\ X_2=2.\ \begin{cases}X=\ln x=-3\Leftrightarrow x=e^{-3}\\X=\ln x=2\Leftrightarrow x=e^{2}\end{cases}.\quad S=\left\{e^{-3};e^{2}\right\}.$

3) $D=]0;+\infty[$. $\forall x\in D;(\ln x)^2-4\ln x-77=0 \Leftrightarrow \begin{cases} X=\ln x \\ X^2-4X-77=0 \end{cases}$

$\Delta=324>0 \Rightarrow X_1=-7\ ;\ X_2=11.\begin{cases} X=\ln x=-7 \Leftrightarrow x=e^{-7} \\ X=\ln x=11 \Leftrightarrow x=e^{11} \end{cases}$. $S=\{e^{-7};e^{11}\}$.

4) $D=]0;+\infty[$. $\forall x\in D;(\ln x)^2-2\ln x-3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} X=\ln x \\ X^2-2X-3=0 \end{cases}$

$\Delta=16>0 \Rightarrow X_1=-1\ ;\ X_2=3.$ $\begin{cases} X=\ln x=-1 \Leftrightarrow x=e^{-1} \\ X=\ln x=3 \Leftrightarrow x=e^{3} \end{cases}$. $S=\{e^{-1};e^{3}\}$.

5) $D=]0;+\infty[$. $(\ln x)^3+2(\ln x)^2-\ln x-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} X=\ln x \\ X^3+2X^2-X-2=0\ \ (1) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow (X-1)(X^2+3X+2)=0 \Leftrightarrow X=1\ ;\ X^2+3X+2=0$

$\Delta=1>0 \Rightarrow X_1=-2\ ;\ X_2=-1.$ $\begin{cases} X=\ln x=-2 \Leftrightarrow x=e^{-2} \\ X=\ln x=-1 \Leftrightarrow x=e^{-1} \\ X=\ln x=1 \Leftrightarrow x=e \end{cases}$. $S=\{e^{-2};e^{-1};e\}$.

6) $D=]0;+\infty[$. $2(\ln x)^3+5(\ln x)^2+\ln x-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} X=\ln x \\ 2X^3+5X^2+X-2=0\ \ (1) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow (X+1)(2X^2+3X-2)=0 \Leftrightarrow X=-1\ ;\ 2X^2+3X-2=0$

$\Delta=25>0 \Rightarrow X_1=-2\ ;\ X_2=\frac{1}{2}.$ $\begin{cases} X=\ln x=-2 \Leftrightarrow x=e^{-2} \\ X=\ln x=-1 \Leftrightarrow x=e^{-1} \\ X=\ln x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e} \end{cases}$. $S=\{e^{-2};e^{-1};\sqrt{e}\}$.

حل متراجحة من الشكل $\ln(u(x))\geq \ln(v(x))$:

حل التمرين 28:

1) $D=]1;+\infty[$. $\forall x\in D;\ln(x-1)<\ln(7x+3) \Leftrightarrow x-1<7x+3 \Leftrightarrow x>-\frac{2}{3}$.

$S=]1;+\infty[$.

2) $D=\left]-\frac{12}{7};+\infty\right[$. $\forall x\in D;\ln(7x+12)<\ln 3 \Leftrightarrow 7x+12<3 \Leftrightarrow x<-\frac{9}{7}$.

$S=\left]-\frac{12}{7};-\frac{9}{7}\right[$.

3) $D=\left]-\infty;\frac{9}{2}\right[$. $\forall x\in D;\ln(9-2x)<2\ln 4 \Leftrightarrow \ln(9-2x)<\ln(4^2)$

$\Leftrightarrow 9-2x<16 \Leftrightarrow x>-\frac{7}{2}$. $\quad S=\left]-\frac{7}{2};\frac{9}{2}\right[$.

4) $D=]-1;+\infty[$. $\forall x\in D; \ln(x+4)>2\ln(x+1) \Leftrightarrow \ln(x+4)>\ln(x+1)^2$

$\Leftrightarrow x+4>(x+1)^2 \Leftrightarrow x+4>x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2+x-3<0$.

$\Delta=13>0 \Rightarrow x_1=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\notin D$; $x_2=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$. $\quad S=\left]-1;\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right[$.

5) $D=\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$. $\forall x\in D; \ln(x+2)+\ln x>\ln(3x-1) \Leftrightarrow \ln[x(x+2)]>\ln(3x-1)$

$\Leftrightarrow x(x+2)>3x-1 \Leftrightarrow x^2+2x>3x-1 \Leftrightarrow x^2-x+1>0$.

$\begin{cases}\Delta=-3<0\\ a=1>0\end{cases} \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}; x^2-x+1>0$. $\quad S=\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$.

6) $D=\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$. $\forall x\in D; \ln(3x^2-x)<\ln x+\ln 2 \Leftrightarrow \ln(3x^2-x)<\ln(2x)$

$\Leftrightarrow 3x^2-x<2x \Leftrightarrow 3x^2-3x<0$ $\quad \Delta=9>0 \Rightarrow x_1=0\notin D$; $x_2=1$. $\quad S=\left]\frac{1}{3};1\right[$.

7) $D=]-\infty;-2[\cup]-1;+\infty[$. $\forall x\in D; \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)>\ln 4 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x+1}>4$

$\Leftrightarrow \frac{x+2}{x+1}-4>0 \Leftrightarrow \frac{x+2-4x-4}{x+1}>0 \Leftrightarrow \frac{-3x-2}{x+1}>0$. $\quad S=\left]-1;-\frac{2}{3}\right[$.

x	$-\infty$		-2		-1		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$-3x-2$		+		//////		+	0	−	
$x+1$		−		//////		+		+	
$\frac{-3x-2}{x+1}$		−		//////		+	0	−	

8) $D=\left]-\infty;-\sqrt{3}\right[\cup\left]\sqrt{3};+\infty\right[$. $\forall x\in D; \ln(x^2-3)>\ln 5 \Leftrightarrow x^2-3>5$

$\Leftrightarrow x^2-8>0 \Leftrightarrow (x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})>0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty;-2\sqrt{2}\right[\cup\left]2\sqrt{2};+\infty\right[$.

$S=\left]-\infty;-2\sqrt{2}\right[\cup\left]2\sqrt{2};+\infty\right[$.

حل التمرين 29:

1) $D=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$. $\forall x\in D; \ln(2x-1)-\ln(2x+1)\le\ln(x+2)$

$\Leftrightarrow \ln(2x-1)\le\ln(x+2)+\ln(2x+1) \Leftrightarrow \ln(2x-1)\le\ln[(x+2)(2x+1)]$

$\Leftrightarrow 2x-1\le(x+2)(2x+1) \Leftrightarrow 2x-1\le 2x^2+5x+2 \Leftrightarrow 2x^2+3x+3\ge 0$

$\begin{cases}\Delta=-15<0\\ a=2>0\end{cases} \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}; 2x^2+3x+3>0$. $\quad S=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

2) $D=\left]-\frac{20}{3};-\frac{27}{8}\right[$. $\quad \forall x\in D; \ln(-8x-27)<\ln(3x+20) \Leftrightarrow -8x-27<3x+20$

$\Leftrightarrow 11x+47>0 \Leftrightarrow x>-\frac{47}{11}$. $S=\left]-\frac{47}{11};-\frac{27}{8}\right[$.

3) $D=]0;1[$. $\forall x\in D; ln(3x)>ln(4-4x)\Leftrightarrow 3x>4-4x\Leftrightarrow x>\frac{4}{7}$. $S=\left]\frac{4}{7};1\right[$.

4) $D=]2;+\infty[$. $\forall x\in D; ln(4x-8)\leq ln3\Leftrightarrow 4x-8\leq 3\Leftrightarrow x\leq\frac{11}{4}$. $S=\left]2;\frac{11}{4}\right]$.

5) $D=]-2;0[\cup]0;+\infty[$. $\forall x\in D; ln(x+2)\leq ln x^2\Leftrightarrow x+2\leq x^2\Leftrightarrow x^2-x-2\geq 0$

$\Delta=9>0\Rightarrow x_1=-1$; $x_2=2$. $S=]-2;-1]\cup[2;+\infty[$.

6) $D=]2;+\infty[$. $\forall x\in D; ln(x-2)\geq ln(2x-1)\Leftrightarrow x-2\geq 2x-1\Leftrightarrow x\leq -1$. $S=\varnothing$.

7) $D=]1;+\infty[$. $\forall x\in D; ln(x^2-1)\leq ln(4x-1)-2ln2\Leftrightarrow ln(x^2-1)\leq ln\left(\frac{4x-1}{4}\right)$

$\Leftrightarrow x^2-1\leq x-\frac{1}{4}\Leftrightarrow x^2-x-\frac{3}{4}\leq 0$. $\Delta=4>0\Rightarrow x_1=-\frac{1}{2}\notin D$; $x_2=\frac{3}{2}$. $S=\left]1;\frac{3}{2}\right]$.

8) $D=]-\infty;-1[\cup]2;3[$. $\forall x\in D; ln(x^2-x-2)<2ln(3-x)$

$\Leftrightarrow ln(x^2-x-2)<ln(3-x)^2\Leftrightarrow x^2-x-2<(3-x)^2$

$\Leftrightarrow x^2-x-2<x^2-6x+9\Leftrightarrow x<\frac{11}{5}$. $S=]-\infty;-1[\cup\left]2;\frac{11}{5}\right[$.

9) $D=\left]-\frac{2}{5};+\infty\right[$. $\forall x\in D; ln(2+5x)\leq ln(x+6)\Leftrightarrow 2+5x\leq x+6\Leftrightarrow x\leq 1$.

$S=\left]-\frac{2}{5};1\right]$.

10) $D=]3;+\infty[$. $\forall x\in D; ln(x-1)+ln(x-3)<ln3\Leftrightarrow ln[(x-1)(x-3)]<ln3$

$\Leftrightarrow(x-1)(x-3)<3\Leftrightarrow x^2-4x<0\Leftrightarrow x(x-4)<0\Leftrightarrow x<4$. $S=]3;4[$.

حل متراجحة من الشكل $ln(u(x))\geq k$:

حل التمرين 30:

1) $D=]5;+\infty[$. $ln(x-5)<4\Leftrightarrow x-5<e^4\Leftrightarrow x<e^4+5\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;e^4+5\right[$.

$S=\left]5;e^4+5\right[$.

2) $D=\left]-\infty;\frac{2}{9}\right[$. $ln(2-9x)>3\Leftrightarrow 2-9x>e^3\Leftrightarrow x<\frac{2-e^3}{9}\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;\frac{2-e^3}{9}\right[$.

$S=\left]-\infty;\frac{2-e^3}{9}\right[$.

3) $D=\left]-\infty;\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right[\cup\left]\frac{-1+\sqrt{17}}{2};+\infty\right[$. $\forall x\in D; ln(x^2+x-4)>2\Leftrightarrow x^2+x-4>e^2$

$\Leftrightarrow x^2+x-4-e^2>0 \qquad \Delta=17+4e^2>0 \Rightarrow x_1=\dfrac{-1-\sqrt{17+4e^2}}{2} \;;\; x_2=\dfrac{-1+\sqrt{17+4e^2}}{2}$

$$S=\left]-\infty;\frac{-1-\sqrt{17+4e^2}}{2}\right[\cup\left]\frac{-1+\sqrt{17+4e^2}}{2};+\infty\right[.$$

4) $D=\mathbb{R}$. $\forall x\in D; ln\left(x^2+2\right)<7 \Leftrightarrow x^2+2<e^7 \Leftrightarrow x^2+2-e^7<0$

$\Leftrightarrow -\sqrt{e^7-2}>x<\sqrt{e^7-2}$. $\qquad S=\left]-\sqrt{e^7-2};\sqrt{e^7-2}\right[$.

5) $D=\left]-\sqrt{3};\sqrt{3}\right[$. $\qquad \forall x\in D; ln\left(3-x^2\right)>5 \Leftrightarrow 3-x^2>e^5 \Leftrightarrow x^2<3-e^5<0$.

$\forall x\in\mathbb{R}; x^2\geq 0$. $\qquad S=\varnothing$.

6) $D=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]2;+\infty\right[$. $\qquad \forall x\in D; ln\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)<1 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-2}<e \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-2}-e<0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+1-e(x-2)}{x-2}<0 \Leftrightarrow \dfrac{x(1-e)+1+2e}{x-2}<0$. $\qquad S=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]\dfrac{1+2e}{e-1};+\infty\right[$.

x	$-\infty$; -1	-1 ; 2	2 ; $\frac{1+2e}{e-1}$	$\frac{1+2e}{e-1}$	$\frac{1+2e}{e-1}$; $+\infty$
$x(1-e)+1+2e$	$+$	(hatched)	$+$	0	$-$
$x-2$	$-$	(hatched)	$+$		$+$
$\frac{x(1-e)+1+2e}{x-2}$	$-$	(hatched)	$+$	0	$-$

7) $D=\left]-2;+\infty\right[$. $\forall x\in D; ln\left(\dfrac{3}{2+x}\right)>\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{3}{2+x}>e^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow 2+x<\dfrac{3}{e^{\frac{1}{3}}} \Leftrightarrow x<3e^{\frac{-1}{3}}-2$.

$$S=\left]-2;3e^{\frac{-1}{3}}-2\right[.$$

8) $D=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$. $\quad \forall x\in D; ln\left(2x^2+3x+1\right)<1$

$\Leftrightarrow 2x^2+3x+1<e \Leftrightarrow 2x^2+3x+1-e<0$

$\Delta=1+8e>0 \Rightarrow x_1=\dfrac{-3-\sqrt{1+8e}}{4} \;;\; x_2=\dfrac{-3+\sqrt{1+8e}}{4}$.

$$S=\left]\frac{-3-\sqrt{1+8e}}{4};-1\right[\cup\left]-\frac{1}{2};\frac{-3+\sqrt{1+8e}}{4}\right[.$$

حل التمرين 31:

1) $D=\left]2;+\infty\right[$. $\quad \forall x\in D; ln(4x-8)>0 \Leftrightarrow 4x-8>1 \Leftrightarrow x>\dfrac{9}{4}$. $\qquad S=\left]\dfrac{9}{4};+\infty\right[$.

2) $D=\left]2;+\infty\right[$. $\quad \forall x\in D; ln(4x-8)>1 \Leftrightarrow 4x-8>e \Leftrightarrow x>\dfrac{e+8}{4}$. $\qquad S=\left]\dfrac{e+8}{4};+\infty\right[$.

3) $D=\left]0;+\infty\right[$. $\quad \forall x\in D; ln\,x>2 \Leftrightarrow x>e^2$. $\qquad S=\left]e^2;+\infty\right[$.

4) $D=\left]\dfrac{5}{2};+\infty\right[$. $\quad \forall x\in D; ln(2x-5)\geq 1 \Leftrightarrow 2x-5\geq e \Leftrightarrow x\geq\dfrac{e+5}{2}$. $\qquad S=\left[\dfrac{e+5}{2};+\infty\right[$.

5) $D=\left]-\infty;\frac{41}{8}\right[$. $\forall x\in D;-12\ln(-8x+41)>-40 \Leftrightarrow \ln(-8x+41)<\frac{10}{3}$

$\Leftrightarrow -8x+41<e^{\frac{10}{3}} \Leftrightarrow x>\frac{41-e^{\frac{10}{3}}}{8}$. $\quad S=\left]\frac{41-e^{\frac{10}{3}}}{8};\frac{41}{8}\right[$.

6) $D=\left]2-\sqrt{10};2+\sqrt{10}\right[$. $\quad \ln(-x^2+4x+6)<0 \Leftrightarrow -x^2+4x+6<1$

$\Leftrightarrow -x^2+4x+5<0$. $\quad \Delta=36>0 \Rightarrow x_1=5\ ;\ x_2=-1$.

$S=\left]2-\sqrt{10};-1\right[\cup\left]5;2+\sqrt{10}\right[$.

7) $D=]0;+\infty[$. $\quad \forall x\in D;2\ln x-1<5 \Leftrightarrow 2\ln x<6 \Leftrightarrow \ln x<3 \Leftrightarrow x<e^3$. $\quad S=\left]0;e^3\right[$.

8) $D=\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$. $\quad \forall x\in D;\ln\left(\frac{2x-3}{5x+1}\right)<0 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{5x+1}<1$

$\Leftrightarrow \frac{2x-3}{5x+1}-1<0 \Leftrightarrow \frac{-3x-4}{5x+1}<0 \Leftrightarrow 3x+4>0 \Leftrightarrow x>-\frac{4}{3}$. $\quad S=\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$.

حل التمرين 32:

1) $D=\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$. $\forall x\in D;\ln(2x+3)>0 \Leftrightarrow 2x+3>1 \Leftrightarrow x>-1$. $\quad S=]-1;+\infty[$.

2) $D=\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup]0;+\infty[$. $\quad \forall x\in D;\ln\left(\frac{1}{x}+2\right)>0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}+2>1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x}+1>0 \Leftrightarrow \frac{1+x}{x}>0$. $\quad S=]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$.

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$1+x$		$-$	0	$+$				$+$	
x		$-$		$-$				$+$	
$\frac{1+x}{x}$		$+$		$-$				$+$	

3) $D=]-\infty;0[$. $\quad \forall x\in D;\ln\left(\frac{-3}{x}\right)>0 \Leftrightarrow -\frac{3}{x}>1 \Leftrightarrow -\frac{3}{x}-1>0 \Leftrightarrow \frac{-3-x}{x}>0$

x	$-\infty$		-3		0
$-3-x$		$+$	0	$-$	
x		$-$		$-$	
$\frac{-3-x}{x}$		$-$	0	$+$	

$S=]-3;0[$.

حل متراجحة تتضمن الدالة اللوغاريتمية:

حل التمرين 33:

$D=]0;+\infty[$. $\quad \forall x\in D;(\ln x)^2-1>0 \Leftrightarrow (\ln x)^2>1 \Leftrightarrow \ln x>1\ ;\ \ln x<-1$

$\Leftrightarrow x>e\ ;\ x<e^{-1}$. $\quad S=\left]0;e^{-1}\right[\cup]e;+\infty[$.

4) $D=\left]0;e^2\right[\cup\left]e^2;+\infty\right[$. $\dfrac{1+\ln x}{2-\ln x}>0$. $S=\left]e^{-1};e^2\right[$.

x	0	e^{-1}	e^2	$+\infty$
$1+\ln x$	$-$	0 $+$		$+$
$2-\ln x$	$+$	$+$		$-$
$\dfrac{1+\ln x}{2-\ln x}$	$-$	0 $+$		$-$

5) $D=]0;+\infty[$. $\forall x\in D;\dfrac{2(1+\ln x)}{x}>0\Leftrightarrow 1+\ln x>0\Leftrightarrow x>e^{-1}$. $S=\left]e^{-1};+\infty\right[$.

6) $D=]-2;+\infty[$. $\forall x\in D;(x-3)\ln(x+2)>0$. $S=]-2;-1[\cup]3;+\infty[$.

x	-2	-1	3	$+\infty$
$\ln(x+2)$	$-$	0 $+$		$+$
$x-3$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-3)\ln(x+2)$	$+$	0 $-$	0	$+$

حل متراجحة من الشكل $a(\ln x)^2+b\ln x+c\geq 0$:

حل التمرين 34:

1) $D=]0;+\infty[$. $\forall x\in D;(\ln x)^2-\ln x-6<0\Leftrightarrow\begin{cases}X=\ln x\\X^2-X-6<0\end{cases}$

$\Delta=25>0\Rightarrow X_1=-2\ ;\ X_2=3$. $X^2-X-6<0\Leftrightarrow X\in]-2;3[$

$\begin{cases}X=\ln x=-2\Leftrightarrow x=e^{-2}\\X=\ln x=3\Leftrightarrow x=e^3\end{cases}$ $X\in]-2;3[\Leftrightarrow x\in\left]e^{-2};e^3\right[$. $S=\left]e^{-2};e^3\right[$.

2) $D=]0;+\infty[$. $\forall x\in D;(\ln x)^2+\ln x-6\leq 0\Leftrightarrow\begin{cases}X=\ln x\\X^2+X-6\leq 0\end{cases}$

$\Delta=25>0\Rightarrow X_1=-3\ ;\ X_2=2$. $X^2+X-6\leq 0\Leftrightarrow X\in[-3;2]$

$\begin{cases}X=\ln x=-3\Leftrightarrow x=e^{-3}\\X=\ln x=2\Leftrightarrow x=e^2\end{cases}$ $X\in[-3;2]\Leftrightarrow x\in\left[e^{-3};e^2\right]$. $S=\left[e^{-3};e^2\right]$.

3) $D=]0;1[\cup]1;+\infty[$. $\forall x\in D;\ln x-\dfrac{1}{\ln x}>\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow(\ln x)^2-\dfrac{3}{2}\ln x-1>0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}X=\ln x\\X^2-\dfrac{3}{2}X-1>0\end{cases}$. $\Delta=\dfrac{25}{4}>0\Rightarrow X_1=-\dfrac{1}{2}\ ;\ X_2=2$.

$\begin{cases}X=\ln x=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=e^{\frac{-1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}\\X=\ln x=2\Leftrightarrow x=e^2\end{cases}$. $X^2-\dfrac{3}{2}X-1>0\Leftrightarrow X\in\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right[\cup]2;+\infty[$.

$\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right[\cup\left]e^2;+\infty\right[$ $S=\left]0;\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right[\cup\left]e^2;+\infty\right[$.

4) $D=]0;+\infty[$. $\forall x\in D; ln\left(x^2\right)-(ln\,x)^2>0 \Leftrightarrow 2\,ln\,x-(ln\,x)^2>0$

$\Leftrightarrow ln\,x(2-ln\,x)>0$. $S=\left]1;e^2\right[$.

x	0		1		e^2		$+\infty$
$ln\,x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$2-ln\,x$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$ln\,x(2-ln\,x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

دراسة إشارة عبارة تتضمن دالة لوغاريتمية:

حل التمرين 35:

❖ $D_A=]0;+\infty[$. $A(x)=ln\,x(ln\,x+1)$

x	0		1		e^{-1}		$+\infty$
$ln\,x$		$-$	0	$+$		$+$	
$ln\,x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$ln\,x(ln\,x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$A(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in]0;1]\cup\left[e^{-1};+\infty\right[$ $A(x)<0 \Leftrightarrow x\in \left]1;e^{-1}\right[$.

❖ $D_B=]-\infty;1[$. $B(x)=2x\,ln(1-x)$

x	$-\infty$		0		1
$2x$		$-$	0	$+$	
$ln(1-x)$		$+$	0	$-$	
$2x\,ln(1-x)$		$-$	0	$-$	

$B(x)<0 \Leftrightarrow x\in]-\infty;0[\cup]0;1[$ $B(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

❖ $D_C=]-1;+\infty[$. $C(x)=-x^2\,ln(x+1)$

x	-1		0		$+\infty$
$-x^2$		$-$	0	$-$	
$ln(x+1)$	‖	$-$	0	$+$	
$-x^2\,ln(x+1)$	‖	$+$	0	$-$	

$C(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in]-1;0]$ $C(x)<0 \Leftrightarrow x\in]0;+\infty[$.

حل التمرين 36:

1) $D=\left]-\infty;\frac{7}{4}\right[$. $\forall x\in D; ln(7-4x)=0 \Leftrightarrow 7-4x=1 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$\frac{7}{4}$
$ln(7-4x)$		$+$	0	$-$	‖

❖ $ln(7-4x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in \left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$.

❖ $ln(7-4x)<0 \Leftrightarrow x\in \left]\frac{3}{2};\frac{7}{4}\right[$.

2) $D=\left]-\sqrt{3};\sqrt{3}\right[$. $\forall x\in D; ln\left(3-x^2\right)=0 \Leftrightarrow 3-x^2=1 \Leftrightarrow x^2=2$

$\Leftrightarrow x=-\sqrt{2}\ ;\ x=\sqrt{2}$.

x	$-\sqrt{3}$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$\sqrt{3}$
$ln(3-x^2)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	||

❖ $ln(3-x^2)\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

❖ $ln(3-x^2)<0 \Leftrightarrow x\in\left]-\sqrt{3};-\sqrt{2}\right[\cup\left]\sqrt{2};\sqrt{3}\right[$.

3) $D=\left]-\infty;-\frac{5}{2}\right[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$. $\forall x\in D; ln\left(x^2+x-\frac{15}{4}\right)=0\Leftrightarrow x^2+x-\frac{15}{4}=1$

$\Leftrightarrow x^2+x-\frac{19}{4}=0\Leftrightarrow x_1=\frac{-1-\sqrt{20}}{2}\ ;\ x_2=\frac{-1+\sqrt{20}}{2}$.

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{20}}{2}$		$-\frac{5}{2}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{20}}{2}$		$+\infty$
$ln\left(x^2+x-\frac{15}{4}\right)$		$+$	0	$-$	||		||	$-$	0	$+$	

❖ $ln\left(x^2+x-\frac{15}{4}\right)\geq 0\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;\frac{-1-\sqrt{20}}{2}\right]\cup\left[\frac{-1+\sqrt{20}}{2};+\infty\right[$.

❖ $ln\left(x^2+x-\frac{15}{4}\right)<0\Leftrightarrow x\in\left]\frac{-1-\sqrt{20}}{2};-\frac{5}{2}\right[\cup\left]\frac{3}{2};\frac{-1+\sqrt{20}}{2}\right[$.

4) $D=]0;+\infty[$. $\forall x\in D; ln\left(\frac{3}{x}\right)=0\Leftrightarrow\frac{3}{x}=1\Leftrightarrow x=3$.

x	0		3		$+\infty$
$ln\left(\frac{3}{x}\right)$	||	$+$	0	$-$	

❖ $ln\left(\frac{3}{x}\right)\geq 0\Leftrightarrow x\in]0;3]$. $ln\left(\frac{3}{x}\right)<0\Leftrightarrow x\in]3;+\infty[$.

5) $D=]-\infty;2[$. $\forall x\in D; ln\left(\sqrt{2-x}\right)=0\Leftrightarrow\sqrt{2-x}=1\Leftrightarrow x=1$.

x	$-\infty$		1		2
$ln\left(\sqrt{2-x}\right)$		$+$	0	$-$	||

❖ $ln\left(\sqrt{2-x}\right)\geq 0\Leftrightarrow x\in]-\infty;1]$. $ln\left(\sqrt{2-x}\right)<0\Leftrightarrow x\in]0;2[$.

6) $D=]0;+\infty[$. $\forall x\in D; (ln\,x-1)(ln\,x+2)=0\Leftrightarrow ln\,x=1\ ;\ ln\,x=-2$

$\Leftrightarrow x=e\ ;\ x=e^{-2}$.

x	0		e^{-2}		e		$+\infty$
$ln\,x+2$	||	$-$	0	$+$		$+$	
$ln\,x-1$	||	$-$		$-$	0	$+$	
$(ln\,x-1)(ln\,x+2)$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	

❖ $(ln\,x-1)(ln\,x+2)\geq 0\Leftrightarrow x\in\left]0;e^{-2}\right]\cup[e;+\infty[$.

❖ $(ln\,x-1)(ln\,x+2)<0\Leftrightarrow x\in\left]e^{-2};e\right[$.

7) $D=\left]-1;\frac{1}{3}\right[$. $\forall x\in D; ln\left(\frac{1-3x}{2x+2}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{1-3x}{2x+2}=1 \Leftrightarrow \frac{1-3x}{2x+2}-1=0$

$\Leftrightarrow \frac{1-3x-2x-2}{2x+2}=0 \Leftrightarrow \frac{-1-5x}{2x+2}=0 \Leftrightarrow -1-5x=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{5}$.

x	-1		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{3}$
$-1-5x$	‖	$+$	0	$-$	‖
$2x+2$	0	$+$		$+$	
$\frac{-1-5x}{2x+2}$	‖	$+$	0	$-$	‖

❖ $ln\left(\frac{1-3x}{2x+2}\right)\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left]-1;\frac{1}{5}\right]$. $ln\left(\frac{1-3x}{2x+2}\right)<0 \Leftrightarrow x\in\left]\frac{1}{5};\frac{1}{3}\right[$.

8) $D=]ln5;+\infty[$. $\forall x\in D; ln\left(e^x-5\right)=0 \Leftrightarrow e^x-5=1 \Leftrightarrow e^x=6 \Leftrightarrow x=ln6$.

x	$ln5$		$ln6$		$+\infty$
$ln\left(e^x-5\right)$	‖	$-$	0	$+$	

❖ $ln\left(e^x-5\right)\geq 0 \Leftrightarrow x\in[ln6;+\infty[$. $ln\left(e^x-5\right)<0 \Leftrightarrow x\in]ln5;ln6[$.

تمّ بحمد الله وتوفيقه