حلول تمارين درس الدوال اللوغاريتمية -الجزء 2-

فهرس حلول التمارين

إيجاد مشتقة دالة لوغاريتمية:

حل التمرين 1:

1) $\forall x \in \mathbb{R};\ f(x) = ln\left(x^2+3\right) \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+3}$.

2) $\forall x \in \left]0;+\infty\right[;\ f(x) = ln\left(\dfrac{1}{x}\right) \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x}} = -\dfrac{1}{x}$.

3) $\forall x \in \left]ln2;+\infty\right[;\ f(x) = ln\left(e^x-2\right) \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x-2}$.

4) $\forall x \in \left]-\infty;\dfrac{4}{3}\right[;\ f(x) = ln(4-3x) \Leftrightarrow f'(x) = -\dfrac{3}{4-3x}$.

5) $\forall x \in \left]1;+\infty\right[;\ f(x) = ln\left(\sqrt{x-1}\right) \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{1}{2x-2}$.

6) $\forall x \in \left]-\infty;-1\right[\cup\left]1;+\infty\right[;\ f(x) = ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{\dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}}{\dfrac{x+1}{x-1}}$

$\Leftrightarrow f'(x) = -\dfrac{2}{(x-1)^2}\times\dfrac{x-1}{x+1} = -\dfrac{2}{(x-1)(x+1)}$.

7) $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\};\ f(x) = ln\left(x^2+4x+4\right) \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{2x+4}{x^2+4x+4}$.

8) $\forall x \in \left]-\infty;0\right[;\ f(x) = ln(-2x) \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{-2}{-2x} = \dfrac{1}{x}$.

9) $\forall x \in \left]0;+\infty\right[;\ f(x) = ln\left(1+\sqrt{x}\right) \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)} = \dfrac{1}{2\left(\sqrt{x}+x\right)}$.

10) $\forall x \in \mathbb{R};\ f(x) = ln\left(e^x+1\right) \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$.

حل التمرين 2:

1) $\forall x \in \left]-1;\dfrac{1-\sqrt{21}}{10}\right[\cup\left]\dfrac{1+\sqrt{21}}{10};+\infty\right[;\ f(x) = ln\left(5x^3+4x^2-2x-1\right)$

$\Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{15x^2+8x-2}{5x^3+4x^2-2x-1}$.

2) $\forall x \in \left]-\dfrac{5}{8};+\infty\right[;\ f(x) = ln(8x+5) \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{8}{8x+5}$.

3) $\forall x \in \left]-\infty;\frac{-1-\sqrt{33}}{16}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{33}-1}{16};+\infty\right[; f(x)=\ln\left(8x^2+x-1\right) \Leftrightarrow f'(x)=\frac{16x+1}{8x^2+x-1}$.

4) $\forall x \in \left]-\frac{5}{8};+\infty\right[; f(x)=-\frac{1}{3}\ln(8x+5)+7\ln(x+5) \Leftrightarrow f'(x)=\frac{-8}{3(8x+5)}+\frac{7}{x+5}$

$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{-8(x+5)+21(8x+5)}{3(8x+5)(x+5)}=\frac{160x+65}{3(8x+5)(x+5)}$.

5) $\forall x \in]-1;+\infty[; f(x)=\ln\left(6x^3-3x^2-5x+4\right) \Leftrightarrow f'(x)=\frac{18x^2-6x-5}{6x^3-3x^2-5x+4}$.

6) $\forall x \in \left]-\frac{6}{7};+\infty\right[; f(x)=-4\ln(7x+6) \Leftrightarrow f'(x)=-\frac{28}{7x+6}$.

7) $\forall x \in]0;+\infty[; f(x)=-\ln x+3\ln(4x+3) \Leftrightarrow f'(x)=-\frac{1}{x}+\frac{12}{4x+3}=\frac{8x-3}{x(4x+3)}$.

8) $\forall x \in \left]-\infty;\frac{3}{5}\right[; f(x)=8\ln(3-5x) \Leftrightarrow f'(x)=-\frac{40}{3-5x}$.

9) $\forall x \in \mathbb{R}; f(x)=\ln\left(1+x^2\right) \Leftrightarrow f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}$.

10) $\forall x \in]0;2[; f(x)=\ln\left(2x-x^2\right) \Leftrightarrow f'(x)=\frac{2(1-x)}{2x-x^2}$.

حل التمرين 3:

1) $\forall x \in \left]\frac{5}{2};+\infty\right[; f(x)=\ln(2x-5) \Leftrightarrow f'(x)=\frac{2}{2x-5}$.

2) $\forall x \in \left]-\infty;\frac{1}{3}\right[; f(x)=\ln(-3x+1) \Leftrightarrow f'(x)=\frac{-3}{1-3x}$.

3) $\forall x \in \mathbb{R}; f(x)=\ln\left(x^2+x+1\right) \Leftrightarrow f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}$.

4) $\forall x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[; f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \Leftrightarrow f'(x)=\frac{\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}}{\frac{x-1}{x+1}}$

$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}\times\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{(x+1)(x-1)}$.

5) $\forall x \in]1;+\infty[; f(x)=\ln(\ln x) \Leftrightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}=\frac{1}{x\ln x}$.

6) $\forall x \in \mathbb{R}^*; f(x)=\ln x^2 \Leftrightarrow f'(x)=\frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x}$.

7) $\forall x \in]0;+\infty[; f(x)=(\ln x)^2 \Leftrightarrow f'(x)=2\times\frac{1}{x}(\ln x)=\frac{2\ln x}{x}$.

8) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$.

❖ $\forall x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\,;\ f(x) = ln\left|1-x^2\right| = ln\left(x^2-1\right) \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$.

❖ $\forall x \in]-1;1[\,;\ f(x) = ln\left|1-x^2\right| = ln\left(1-x^2\right) \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{-2x}{1-x^2} = \dfrac{2x}{x^2-1}$.

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\};\ f(x) = ln\left|1-x^2\right| \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$.

9) $\forall x \in]3;+\infty[\,;\ f(x) = ln\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right) \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{\dfrac{(x-3)-(x+2)}{(x-3)^2}}{\dfrac{x+2}{x-3}}$

$\Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{-5}{(x-3)^2} \times \dfrac{x-3}{x+2} = -\dfrac{5}{(x-3)(x+2)}$.

إيجاد مشتقة دالة مرجعية تتضمن عبارة لوغاريتمية:

حل التمرين 4:

1) $\forall x \in]0;+\infty[\,;\ f(x) = x^3 \ln x \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 \ln x + \dfrac{1}{x}x^3 = 3x^2 \ln x + x^2$.

2) $\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[\,;\ f(x) = \dfrac{1}{\ln x} \Leftrightarrow f'(x) = -\dfrac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = -\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$.

3) $\forall x \in]1;+\infty[\,;\ f(x) = 2\sqrt{\ln x} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{2\times\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln x}} = \dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}$.

4) $\forall x \in]0;+\infty[\,;\ f(x) = \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) \Leftrightarrow -\dfrac{1}{x^2}\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}\right)$

$\Leftrightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}\ln x - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{\ln(x)-1}{x^2}$.

5) $\forall x \in]-2;0[\cup]0;+\infty[\,;\ f(x) = \dfrac{ln(x+2)}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{\left(\dfrac{1}{x+2}\right)x^2 - ln(x+2)\times 2x}{x^4}$

$f'(x) = \dfrac{\dfrac{x}{x+2} - 2\,ln(x+2)}{x^3} = \dfrac{x-2(x+2)ln(x+2)}{x^3(x+2)}$.

6) $\forall x \in]0;+\infty[\,;\ f(x) = (\ln x+1)(\ln x-1) \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}(\ln x-1) + (\ln x+1)\times\dfrac{1}{x} = \dfrac{2\ln x}{x}$.

7) $\forall x\in\left]-1;+\infty\right[;\ f(x)=(x+1)\left(\ln\sqrt{x+1}\right)\Leftrightarrow f'(x)=1\left(\ln\sqrt{x+1}\right)+(x+1)\times\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}$

$\Leftrightarrow f'(x)=\ln\sqrt{x+1}+\dfrac{x+1}{2(x+1)}=\dfrac{1}{2}+\ln\sqrt{x+1}.$

8) $\forall x\in\left]0;+\infty\right[;\ f(x)=\dfrac{\ln\left(x^2+2x\right)}{\ln x}\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{\left(\frac{2x+2}{x^2+2x}\right)\ln x-\frac{1}{x}\ln\left(x^2+2x\right)}{(\ln x)^2}$

$\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{(2x+2)\ln x-(x+2)\ln\left(x^2+2x\right)}{\left(x^2+2x\right)(\ln x)^2}.$

9) $\forall x\in\left]e;+\infty\right[;\ f(x)=\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}(\ln x-1)-\frac{1}{x}(\ln x+1)}{(\ln x-1)^2}=-\dfrac{2}{x(\ln x-1)^2}.$

حل التمرين 5:

1) $\forall x\in\left]0;+\infty\right[;\ f(x)=-3x+5-\ln x\Leftrightarrow f'(x)=-3-\dfrac{1}{x}.$

2) $\forall x\in\left]0;+\infty\right[;\ f(x)=\left(5x^2-x+2\right)\ln x\Leftrightarrow f'(x)=(10x-1)\ln x+\dfrac{5x^2-x+2}{x}.$

3) $\forall x\in\left]-3;+\infty\right[;\ f(x)=4\ln(x+3)+3x+3\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{4}{x+3}+3.$

4) $\forall x\in\left]0;+\infty\right[;\ f(x)=4x^2+2x+2\ln x\Leftrightarrow f'(x)=8x+2+\dfrac{2}{x}.$

5) $\forall x\in\left]0;+\infty\right[;\ f(x)=3\ln x+5x-9\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{3}{x}+5.$

6) $\forall x\in\left]0;+\infty\right[;\ f(x)=\left(x^5-3x^2+1\right)\ln x\Leftrightarrow f'(x)=\left(5x^4-6x\right)\ln x+\dfrac{x^5-3x^2+1}{x}.$

7) $\forall x\in\left]0;+\infty\right[;\ f(x)=3\ln x+158x^3-24x+5\sqrt{x}\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{3}{x}+474x^2-24+\dfrac{5}{2\sqrt{x}}.$

8) $\forall x\in\left]0;e^{-2}\right[\cup\left]e^{-2};+\infty\right[;\ f(x)=\dfrac{x+1}{\ln x+2}\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{1\times(\ln x+2)-(x+1)\times\frac{1}{x}}{(\ln x+2)^2}$

$\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{\ln x+2-1-\frac{1}{x}}{(\ln x+2)^2}=\dfrac{x(\ln x+1)-1}{x(\ln x+2)^2}=\dfrac{x\ln x+x-1}{x(\ln x+2)^2}.$

حل التمرين 6:

1) $\forall x\in]0;+\infty[\,;\ f(x)=x+2\ln x \Leftrightarrow f'(x)=1+\dfrac{2}{x}$.

2) $\forall x\in]0;+\infty[\,;\ f(x)=3+x\ln x \Leftrightarrow f'(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}\times x=\ln x+1$

3) $\forall x\in]0;+\infty[\,;\ f(x)=(x-1)\ln x \Leftrightarrow f'(x)=\ln x+\dfrac{x-1}{x}=\ln x+1-\dfrac{1}{x}$.

4) $\forall x\in]0;+\infty[\,;\ f(x)=\dfrac{\ln x}{x} \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x-1\times\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

5) $\forall x\in]0;+\infty[\,;\ f(x)=2x(\ln x+1)^2 \Leftrightarrow f'(x)=2(\ln x+1)^2+2x\times 2\dfrac{1}{x}(\ln x+1)$

$\Leftrightarrow f'(x)=2(\ln x+1)^2+4(\ln x+1)=2(\ln x+1)(\ln x+1+2)=2(\ln x+1)(\ln x+3)$.

6) $\forall x\in]0;+\infty[\,;\ f(x)=(3x+1)(\ln x)^3 \Leftrightarrow f'(x)=3(\ln x)^3+(3x+1)\times 3\times\dfrac{1}{x}(\ln x)^2$

$\Leftrightarrow f'(x)=3(\ln x)^2\left(\ln x+3+\dfrac{1}{x}\right)$.

حل التمرين 7:

1) $\forall x\in]0;+\infty[\,;\ f(x)=2x+1+\ln x \Leftrightarrow f'(x)=2+\dfrac{1}{x}$.

2) $\forall x\in]0;+\infty[\,;\ f(x)=x\ln x-x \Leftrightarrow f'(x)=1\times\ln x+x\times\dfrac{1}{x}-1=\ln x+1-1=\ln x$.

3) $\forall x\in]-1;+\infty[\,;\ f(x)=\dfrac{2\ln(x+1)}{x+1} \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{2\left(\frac{1}{x+1}(x+1)-1\times\ln(x+1)\right)}{(x+1)^2}$

$\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{2(1-\ln(x+1))}{(x+1)^2}$.

4) $\forall x\in]0;+\infty[\,;\ f(x)=x^2+(\ln x)^2 \Leftrightarrow f'(x)=2x+2\times\dfrac{1}{x}\times\ln x=2x+\dfrac{2\ln x}{x}$.

5) $\forall x\in]0;+\infty[\,;\ f(x)=e^x\ln x \Leftrightarrow f'(x)=e^x\ln x+\dfrac{1}{x}e^x=e^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$.

6) $\forall x\in]0;+\infty[\,;\ f(x)=(-4x-5)\ln x \Leftrightarrow f'(x)=-4\ln x+(-4x-5)\times\dfrac{1}{x}$

$\Leftrightarrow f'(x)=-4\ln x-\dfrac{4x+5}{x}=-4\ln x-4-\dfrac{5}{x}=-4(\ln x+1)-\dfrac{5}{x}$.

حل التمرين 8:

1) $\forall x\in]0;+\infty[\,;\ f(x)=-\dfrac{x}{2}+1+2\ln x \Leftrightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{x}=\dfrac{4-x}{2x}$.

2) $\forall x\in]0;+\infty[\,;\, f(x)=\dfrac{2\ln x}{\ln 3} \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{2}{\ln 3}\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{x\ln 3}$.

3) $\forall x\in]0;4[\,;\, f(x)=\ln(4-x)+\ln x \Leftrightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{4-x}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{4-2x}{x(4-x)}=\dfrac{2(2-x)}{x(4-x)}$.

4) $\forall x\in]0;+\infty[\,;\, f(x)=x\ln x-x \Leftrightarrow f'(x)=1\times\ln x+x\times\dfrac{1}{x}-1=\ln x+1-1=\ln x$.

5) $\forall x\in]0;+\infty[\,;\, f(x)=x^2\ln x \Leftrightarrow f'(x)=2x\ln x+x^2\times\dfrac{1}{x}=2x\ln x+x=x(2\ln x+1)$.

6) $\forall x\in \left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[\,;\, f(x)=x\ln(2x-3) \Leftrightarrow f'(x)=1\times\ln(2x-3)+x\times\dfrac{2}{2x-3}$

$\Leftrightarrow f'(x)=\ln(2x-3)+\dfrac{2x}{2x-3}=\dfrac{(2x-3)\ln(2x-3)+2x}{2x-3}$.

7) $\forall x\in]0;+\infty[\,;\, f(x)=2x(1-\ln x) \Leftrightarrow f'(x)=2(1-\ln x)+2x\left(-\dfrac{1}{x}\right)$

$\Leftrightarrow f'(x)=2(1-\ln x)-2=2(1-\ln x-1)=-2\ln x$.

8) $\forall x\in]0;+\infty[\,;\, f(x)=\dfrac{x-\ln x}{x^2} \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)x^2-(x-\ln x)2x}{x^4}$

$\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{x^2-x-2x^2+2x\ln x}{x^4}=\dfrac{-x^2-x+2x\ln x}{x^4}=\dfrac{2\ln x-x-1}{x^3}$.

9) $\forall x\in]0;+\infty[\,;\, f(x)=(\ln x)^2-2\ln x-4 \Leftrightarrow f'(x)=2\times\dfrac{1}{x}\ln x-2\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{2(\ln x-1)}{x}$.

تحديد نهاية دالة لوغاريتمية:

حل التمرين 9:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x-2)-\ln(x+3)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)=\ln 1=0$.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+1\right)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(x^2+1\right)=+\infty$.

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+3e^{-x}\right)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(2+3e^{-x}\right)=+\infty$.

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+3e^{-x}\right)=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(2+3e^{-x}\right)=\ln 2$.

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x-1}{4e^x-3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x\left(1-e^{-x}\right)}{e^x\left(4-3e^{-x}\right)}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-e^{-x}}{4-3e^{-x}}\right)=\dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{e^x-1}{4e^x-3}\right)=\ln\dfrac{1}{4}=-\ln 4$.

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(2x^2+3x+2\right)-2\ln(x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{2x^2+3x+2}{(x-1)^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{2x^2+3x+2}{x^2-2x+1}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+3x+2}{x^2-2x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2}{x^2}\right)=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{2x^2+3x+2}{x^2-2x+1}\right)=\ln 2$.

7) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0\end{cases} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-e^{-x}\right)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(e^x-e^{-x}\right)=+\infty$.

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-4x+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(x^2-4x+1\right)=+\infty$.

حل التمرين 10:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+x^2\right)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)=+\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+x^2\right)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)=+\infty$.

3) $\lim\limits_{x\to0} 1+x^2=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0} \ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)=\ln 2$.

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \ln x^2=+\infty$.

حل التمرين 11:

1) $f(x)=\ln(1-3x) \Leftrightarrow D_f=\left]-\infty;\dfrac{1}{3}\right[$.

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-3x)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1-3x)=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}\frac{1}{3}}(1-3x)=0^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{<}\frac{1}{3}} \ln(1-3x)=-\infty$.

2) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right) \Leftrightarrow D_f=\mathbb{R}$.

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)=\ln\dfrac{1}{2}$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)=+\infty$.

3) $f(x)=\sqrt{x}\ln x \Leftrightarrow D_f=]0;+\infty[$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\sqrt{x}=0$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\ln x=-\infty$ ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل $"0\times\infty"$:

- $\forall x\in]0;+\infty[\,; f(x)=\sqrt{x}\ln x=\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}\right)^2=2\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}\right)$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} 2\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}\right)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=0$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\ln x=+\infty$.

4) $f(x)=ln\left(\frac{5-x}{3+x}\right) \Leftrightarrow D_f=]-3;5[$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-3}\left(\frac{5-x}{3+x}\right)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}-3} ln\left(\frac{5-x}{3+x}\right)=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}5}\left(\frac{5-x}{3+x}\right)=0^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{<}5} ln\left(\frac{5-x}{3+x}\right)=-\infty$.

تحديد نهاية دالة مرجعية تتضمن عبارة لوغاريتمية:

حل التمرين 12:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x-4)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\,x=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(-x-4)ln\,x=-\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to0^+} ln\,x-7=-\infty$; $\lim\limits_{x\to0^+} x^2+4x=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^2+4x}{ln\,x-7}=0$.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-1\right)=-1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\,x=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-1\right)ln\,x=-\infty$.

4) $\lim\limits_{x\to0^+} ln\,x=-\infty$; $\lim\limits_{x\to0^+} x=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0^+}\frac{ln\,x}{x}=-\infty$.

5) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-1\right)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to0^+} ln\,x=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-1\right)ln\,x=-\infty$.

6) $\lim\limits_{x\to0^+} 2x+3=3$; $\lim\limits_{x\to0^+} ln\,x=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0^+}\frac{2x+3}{ln\,x}=0$.

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\,x=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x^2-4=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} ln\,x+\frac{1}{2}x^2-4=+\infty$.

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}(ln\,x+1)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-ln\,x)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(ln\,x+1)(3-ln\,x)=-\infty$.

حل التمرين 13:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\,x=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+ln\,x\right)=+\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\,x=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)ln\,x=-\infty$.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\,x=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(ln2-3ln\,x)=-\infty$.

4) $\lim\limits_{x\to0^+}(x-4)=-4$; $\lim\limits_{x\to0^+} ln\,x=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0^+}(x-4+ln\,x)=-\infty$.

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\,x=+\infty$ ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل $"\infty-\infty"$:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x-ln\,x=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{ln\,x}{x}\right)$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ln\,x}{x}=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{ln\,x}{x}=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{ln\,x}{x}\right)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x-ln\,x=+\infty$.

6) $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\ln 1=0$ ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل "$0\times\infty$":

نضع $X=\frac{1}{x}$ ومنه فإن $\lim_{x\to+\infty} X=0^+$ و. $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ تصبح $\lim_{X\xrightarrow{>}0} \frac{1}{X}\ln(1+X)$. ومن خلال الدرس لدينا $\lim_{X\xrightarrow{>}0} \frac{\ln(1+X)}{X}=1$ ، ومنه فإن $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$.

7) $\lim_{x\to0} \frac{1}{x}=+\infty$ و $\lim_{x\to0} \ln(1+2x)=\ln 1=0$ ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل "$0\times\infty$":

نضع: $X=2x$. ومنه فإن $\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+2x)}{x}$ تصبح $\lim_{X\to0} \frac{2\ln(1+X)}{X}$ ، وبما أن: $\lim_{X\xrightarrow{>}0} \frac{\ln(1+X)}{X}=1$ فإن $\lim_{X\to0} \frac{2\ln(1+X)}{X}=2$ ، ومنه فإن $\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+2x)}{x}=2$.

8) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}-1=-1$; $\lim_{x\to+\infty} \ln x=+\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}-1+\ln x=+\infty$.

حل التمرين 14:

1) $f(x)=\frac{\ln(-x)}{3x+2} \Leftrightarrow D_f=\left]-\infty;-\frac{2}{3}\right[\cup\left]-\frac{2}{3};0\right[$.

❖ $\lim_{x\to-\infty} \ln(-x)=0$; $\lim_{x\to-\infty} 3x+2=-\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(-x)}{3x+2}=0$.

❖ $\lim_{x\xrightarrow{<}-\frac{2}{3}} \ln(-x)=\ln\left(\frac{2}{3}\right)<0$; $\lim_{x\xrightarrow{<}-\frac{2}{3}} 3x+2=0^- \Leftrightarrow \lim_{x\xrightarrow{<}-\frac{2}{3}} \frac{\ln(-x)}{3x+2}=+\infty$.

❖ $\lim_{x\xrightarrow{>}-\frac{2}{3}} \ln(-x)=\ln\left(\frac{2}{3}\right)<0$; $\lim_{x\xrightarrow{>}-\frac{2}{3}} 3x+2=0^+ \Leftrightarrow \lim_{x\xrightarrow{>}-\frac{2}{3}} \frac{\ln(-x)}{3x+2}=-\infty$.

❖ $\lim_{x\xrightarrow{<}0} \ln(-x)=-\infty$; $\lim_{x\xrightarrow{<}0} 3x+2=2 \Leftrightarrow \lim_{x\xrightarrow{<}0} \frac{\ln(-x)}{3x+2}=-\infty$.

2) $f(x)=25x^2\ln(-x) \Leftrightarrow D_f=]-\infty;0[$.

❖ $\lim_{x\to-\infty} 25x^2=+\infty$; $\lim_{x\to-\infty} \ln(-x)=+\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} 25x^2\ln(-x)=+\infty$.

❖ $\lim_{x\to0} 25x^2=0$ و $\lim_{x\to0} \ln(-x)=-\infty$ ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل "$0\times\infty$": نطبق طريقة "l'hôpital" لنزع حالة عدم التعيين.

- $\lim_{x\to0} 25x^2\ln(-x)=25\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(-x)}{\frac{1}{x^2}}\right)=25\lim_{x\to0}\left(\frac{(\ln(-x))'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}\right)=25\lim_{x\to0}\left(\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}\right)$

$=25\lim_{x\to0}\left(\frac{-x^2}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to0} 25x^2\ln(-x)=0$.

3) $f(x)=\dfrac{\ln(5x)}{7x-3} \Leftrightarrow D_f=\left]0;\dfrac{3}{7}\right[\cup\left]\dfrac{3}{7};+\infty\right[$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\ln(5x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}(7x-3)=-3 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{\ln(5x)}{7x-3}=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}\frac{3}{7}}\ln(5x)=\ln\left(\dfrac{15}{7}\right)$; $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}\frac{3}{7}}(7x-3)=0^- \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{<}\frac{3}{7}}\dfrac{\ln(5x)}{7x-3}=-\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{3}{7}}\ln(5x)=\ln\left(\dfrac{15}{7}\right)$; $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{3}{7}}(7x-3)=0^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{3}{7}}\dfrac{\ln(5x)}{7x-3}=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(5x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(7x-3)=+\infty$ ، ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل "$\dfrac{\infty}{\infty}$":
نقسم الكسر على أكبر حد في المقام، فنتحصل على:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(5x)}{7x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\ln(5x)}{x}}{7-\frac{3}{x}}$

❖ نطبق طريقة "l'hôpital" على الكسر الأعلى لنزع حالة عدم التعيين:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(5x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln(5x))'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\frac{1}{x}}{1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}7-\dfrac{3}{x}=7-0=7$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\ln(5x)}{x}}{7-\frac{3}{x}}=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(5x)}{7x-3}=0$.

4) $f(x)=(7x-4)^2\ln(-4x) \Leftrightarrow D_f=\left]-\infty;0\right[$.

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty}(7x-4)^2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(-4x)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}(7x-4)^2\ln(-4x)=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to0}(7x-4)^2=16$; $\lim\limits_{x\to0}\ln(-4x)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0}(7x-4)^2\ln(-4x)=-\infty$.

تشكيل جدول تغيرات دالة لوغاريتمية:

حل التمرين 15:

1) $f(x)=\ln(3x-2) \Leftrightarrow D_f=\left]\dfrac{2}{3};+\infty\right[$.

❖ $\forall x\in\left]\dfrac{2}{3};+\infty\right[$; $f(x)=\ln(3x-2) \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{3}{3x-2}>0$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{2}{3}}(3x-2)=0^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{2}{3}}\ln(3x-2)=-\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-2)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} ln(3x-2)=+\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2) $f(x)=ln(x^2-36) \Leftrightarrow D_f=]-\infty;-6[\cup]6;+\infty[$.

❖ $\forall x\in D_f\,;f(x)=ln(x^2-36) \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{2x}{x^2-36}$.

• $\forall x\in D_f\,;x^2-36>0 \Leftrightarrow \begin{cases}\forall x\in D_f\,;f'(x)>0 \Leftrightarrow 2x>0 \Leftrightarrow x>0 \Leftrightarrow x\in]6;+\infty[\\ \forall x\in D_f\,;f'(x)<0 \Leftrightarrow 2x<0 \Leftrightarrow x<0 \Leftrightarrow x\in]-\infty;-6[\end{cases}$.

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-36)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} ln(x^2-36)=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}-6}(x^2-36)=0^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}-6} ln(x^2-36)=-\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}6}(x^2-36)=0^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}6} ln(x^2-36)=-\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-36)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} ln(x^2-36)=+\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$		-6		6		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	//////	‖	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖	//////	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) $f(x)=ln\left(\dfrac{5x+2}{x-3}\right) \Leftrightarrow D_f=\left]-\infty;-\dfrac{2}{5}\right[\cup]3;+\infty[$.

❖ $\forall x\in D_f\,;f(x)=ln\left(\dfrac{5x+2}{x-3}\right) \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{\dfrac{5\times(x-3)-(5x+2)\times 1}{(x-3)^2}}{\dfrac{5x+2}{x-3}}$

$\Leftrightarrow f'(x)=-\dfrac{17}{(x-3)^2}\times\dfrac{x-3}{5x+2}=\dfrac{-17}{(x-3)(5x+2)}$

$\Leftrightarrow \forall x\in D_f\,;f'(x)=\dfrac{-17}{(x-3)(5x+2)}<0$.

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{5x+2}{x-3}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{5x}{x}\right)=5 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} ln\left(\dfrac{5x+2}{x-3}\right)=ln5$.

❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -\frac{2}{5}} (5x+2) = 0^+$; $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -\frac{2}{5}} (x-3) = -\frac{17}{5} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{<} -\frac{2}{5}} \left(\frac{5x+2}{x-3}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{<} -\frac{2}{5}} ln\left(\frac{5x+2}{x-3}\right) = -\infty$.

❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} (5x+2) = 17$; $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} (x-3) = 0^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} \left(\frac{5x+2}{x-3}\right) = +\infty$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} ln\left(\frac{5x+2}{x-3}\right) = +\infty$.

❖ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{5x+2}{x-3}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{5x}{x}\right) = 5 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} ln\left(\frac{5x+2}{x-3}\right) = ln5$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$	$-\frac{2}{5}$		3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$				$-$
f	$ln5 \searrow -\infty$				$+\infty \searrow ln5$

تشكيل جدول تغيرات دالة مرجعية تتضمن عبارة لوغاريتمية:

حل التمرين 16:

1) $f(x) = 2x - ln\,x \Leftrightarrow D_f =]0;+\infty[$.

❖ $\forall x \in]0;+\infty[; f(x) = 2x - ln\,x \Leftrightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2x-1}{x}$.

• $\forall x \in]0;+\infty[; f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x} > 0 \Leftrightarrow 2x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

❖ $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) - ln\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + ln2$.

❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 2x = 0$; $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} ln\,x = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} -ln\,x = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 2x - ln\,x = +\infty$.

❖ $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} ln\,x = +\infty$ ، ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل $"\infty - \infty"$:

• $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - ln\,x = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(2 - \frac{ln\,x}{x}\right)$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln\,x}{x} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{ln\,x}{x}\right) = 2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(2 - \frac{ln\,x}{x}\right) = +\infty$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} 2x - ln\,x = +\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	$1+\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

2) $f(x)=x\ln x \Leftrightarrow D_f=]0;+\infty[$.

❖ $\forall x\in]0;+\infty[\,; f(x)=x\ln x \Leftrightarrow f'(x)=1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow \forall x\in]0;+\infty[\,; f'(x)=\ln x+1$.

• $\forall x\in]0;+\infty[\,; f'(x)>0 \Leftrightarrow \ln x+1>0 \Leftrightarrow x>e^{-1} \Leftrightarrow x\in\left]e^{-1};+\infty\right[$.

❖ $f\left(e^{-1}\right)=\left(e^{-1}\right)\ln\left(e^{-1}\right)=-e^{-1}=-\frac{1}{e}$.

❖ من خلال الدرس نعلم أن: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} x\ln x=0$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x=+\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ 0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

3) $f(x)=\frac{\ln x}{3x} \Leftrightarrow D_f=]0;+\infty[$.

❖ $\forall x\in]0;+\infty[\,; f(x)=\frac{\ln x}{3x} \Leftrightarrow f'(x)=\frac{3x\left(\frac{1}{x}\right)-3\ln x}{(3x)^2}=\frac{3-3\ln x}{9x^2}$

$\Leftrightarrow \forall x\in]0;+\infty[\,; f'(x)=\frac{1-\ln x}{3x^2}$.

• $\forall x\in]0;+\infty[\,; f'(x)>0 \Leftrightarrow 1-\ln x>0 \Leftrightarrow x<e \Leftrightarrow x\in]0;e[$.

❖ $f(e)=\frac{\ln e}{3e}=\frac{1}{3e}$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{3x}=0$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} \ln x=-\infty$; $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} 3x=0^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} \frac{\ln x}{3x}=-\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{3e}$	$\searrow$	0

4) $f(x)=\ln x-4x^2+2 \Leftrightarrow D_f=]0;+\infty[$.

❖ $\forall x\in]0;+\infty[\,;\, f(x)=\ln x-4x^2+2 \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x}-8x$

$\Leftrightarrow \forall x\in]0;+\infty[\,;\, f'(x)=\dfrac{1-8x^2}{x}$.

- $\forall x\in]0;+\infty[\,;\, f'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{1-8x^2}{x}>0 \Leftrightarrow 1-8x^2>0 \Leftrightarrow x<\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow x\in\left]0;\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right[$.

❖ $f\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)=\ln\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)-4\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+2=-\ln\left(2\sqrt{2}\right)-\dfrac{1}{2}+2=\dfrac{3}{2}-\ln\left(2\sqrt{2}\right)$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\ln x=-\infty$; $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left(-4x^2+2\right)=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\ln x-4x^2+2=-\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}-4x^2+2=-\infty$ ، ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل $"\infty-\infty"$:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x-4x^2+2=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\ln x}{x}-4x+\dfrac{2}{x}\right)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}-4x+\dfrac{2}{x}\right)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\ln x}{x}-4x+\dfrac{2}{x}\right)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\ln x-4x^2+2=-\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0		$\frac{1}{2\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}-\ln\left(2\sqrt{2}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

5) $f(x)=1-\dfrac{1}{x}-2\ln x \Leftrightarrow D_f=]0;+\infty[$.

❖ $\forall x\in]0;+\infty[\,;\, f(x)=1-\dfrac{1}{x}-2\ln x \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}$

$\Leftrightarrow \forall x\in]0;+\infty[\,;\, f'(x)=\dfrac{1-2x}{x^2}$.

- $\forall x\in]0;+\infty[\,;\, f'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{1-2x}{x^2}>0 \Leftrightarrow 1-2x>0 \Leftrightarrow x<\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x\in\left]0;\dfrac{1}{2}\right[$.

❖ $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1-\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)}-2\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)=1-2+2\ln 2=2\ln 2-1$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}1-\dfrac{1}{x}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}-2\ln x=+\infty$ ، ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل $"\infty-\infty"$:

- $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}1-\dfrac{1}{x}-2\ln x=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}1-\dfrac{1}{x}\left(1+2x\ln x\right)$.

- $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \left(1-\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$; $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (x\ln x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (1+2x\ln x) = 1$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 1-\dfrac{1}{x}(1+2x\ln x) = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 1-\dfrac{1}{x}-2\ln x = -\infty$.

❖ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1-\dfrac{1}{x}\right) = 1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2\ln x) = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1-\dfrac{1}{x}-2\ln x\right) = -\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$2\ln 2-1$	$\searrow$	$-\infty$

6) $f(x) = x\ln x - 3x \Leftrightarrow D_f =]0;+\infty[$.

❖ $\forall x \in]0;+\infty[; f(x) = x\ln x - 3x \Leftrightarrow f'(x) = 1\times \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 3$

$\Leftrightarrow \forall x \in]0;+\infty[; f'(x) = \ln x - 2$.

- $\forall x \in]0;+\infty[; f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > e^2 \Leftrightarrow x \in \left]e^2;+\infty\right[$.

❖ $f\left(e^2\right) = \left(e^2\right)\ln\left(e^2\right) - 3\left(e^2\right) = 2e^2 - 3e^2 = -e^2$.

❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x\ln x = 0$; $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} -3x = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x\ln x - 3x = 0$.

❖ $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln x = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x = +\infty$ ، ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل $"\infty - \infty"$:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln x - 3x = \lim\limits_{x \to +\infty} x\ln x \left(1-\dfrac{3}{\ln x}\right)$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1-\dfrac{3}{\ln x}\right) = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} x\ln x \left(1-\dfrac{3}{\ln x}\right) = +\infty$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} x\ln x - 3x = +\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0		e^2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-e^2$	$\nearrow$	$+\infty$

حل التمرين 17:

1) $f(x) = x - \ln x \Leftrightarrow D_f =]0;+\infty[$.

❖ $\forall x \in]0;+\infty[; f(x) = x - \ln x \Leftrightarrow f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \forall x \in]0;+\infty[; f'(x) = \dfrac{x-1}{x}$.

- $\forall x \in]0;+\infty[; f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x} > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow x \in]1;+\infty[$.

❖ $f(1) = 1 - \ln 1 = 1$.

❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x = 0$; $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (-\ln x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x - \ln x = +\infty$.

❖ $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ ، ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل $"\infty - \infty"$:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \ln x = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right) = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} x - \ln x = +\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2) $f(x) = x\ln x - x + 3 \Leftrightarrow D_f =]0;+\infty[$.

❖ $\forall x \in]0;+\infty[; f(x) = x\ln x - x + 3 \Leftrightarrow f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1$

$\Leftrightarrow \forall x \in]0;+\infty[; f'(x) = \ln x$.

- $\forall x \in]0;+\infty[; f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow x \in]1;+\infty[$.

❖ $f(1) = 1 \times \ln 1 - 1 + 3 = 2$.

❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x\ln x = 0$; $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} -x + 3 = 3 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x\ln x - x + 3 = 3$.

❖ $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln x = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ ، ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل $"\infty - \infty"$:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln x - x + 3 = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\ln x - 1 + \dfrac{3}{x}\right)$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln x - 1 + \dfrac{3}{x}\right) = +\infty$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\ln x - 1 + \dfrac{3}{x}\right) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} x\ln x - x + 3 = +\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ 3	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

3) $f(x) = \dfrac{x+3}{\ln x} \Leftrightarrow D_f =]0;1[\cup]1;+\infty[$.

❖ $\forall x \in D_f ; f(x) = \dfrac{x+3}{\ln x} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{1 \times \ln x - x \times \dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2} \Leftrightarrow \forall x \in D_f ; f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$.

- $\forall x \in D_f \,; f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} > 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > e \Leftrightarrow x \in \left]e;+\infty\right[$.

❖ $f(e) = \dfrac{e+3}{\ln e} = e+3$.

❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x+3 = 3$; $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{x+3}{\ln x} = 0$.

❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} x+3 = 4$; $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} \ln x = 0^- \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} \dfrac{x+3}{\ln x} = -\infty$.

❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} x+3 = 4$; $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} \ln x = 0^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} \dfrac{x+3}{\ln x} = +\infty$.

❖ $\lim\limits_{x \to +\infty} x+3 = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ ، ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل $"\dfrac{\infty}{\infty}"$:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+3}{\ln x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{\ln x} + \dfrac{3}{\ln x} \right)$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x)'}{(\ln x)'} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{\ln x} = 0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+3}{\ln x} = +\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	0 ↘	$-\infty$	$\Vert$	$+\infty$ ↘	$e+3$	↗	$+\infty$

4) $f(x) = x^2 - 2 + \ln x \Leftrightarrow D_f = \left]0;+\infty\right[$.

❖ $\forall x \in \left]0;+\infty\right[\,; f(x) = x^2 - 2 + \ln x \Leftrightarrow f'(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \left]0;+\infty\right[\,; f'(x) = \dfrac{2x^2+1}{x} > 0$.

❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x^2 - 2 = -2$; $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x^2 - 2 + \ln x = -\infty$.

❖ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 2 + \ln x = +\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$ $+$	
f	$\Vert$ $-\infty$ ↗	$+\infty$

5) $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x} \Leftrightarrow D_f = \left]0;+\infty\right[$.

❖ $\forall x\in]0;+\infty[\,;\ f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x} \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x-1(1+\ln x)}{x^2}=\dfrac{1-1-\ln x}{x^2}$

$\Leftrightarrow \forall x\in]0;+\infty[\,;\ f'(x)=-\dfrac{\ln x}{x^2}$.

• $\forall x\in]0;+\infty[\,;\ f'(x)>0 \Leftrightarrow -\ln x>0 \Leftrightarrow x<1 \Leftrightarrow x\in]0;1[$.

❖ $f(1)=\dfrac{1+\ln 1}{1}=1$.

❖ $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}\dfrac{1+\ln x}{x}=\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}(1+\ln x)\times\dfrac{1}{x}$.

• $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}(1+\ln x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}\dfrac{1}{x}=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}(1+\ln x)\times\dfrac{1}{x}=-\infty$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}\dfrac{1+\ln x}{x}=-\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln x}{x}$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln x}{x}=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\ln x}{x}=0$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	1	↘	0

6) $f(x)=x\ln 2-2\ln x \Leftrightarrow D_f=]0;+\infty[$.

❖ $\forall x\in]0;+\infty[\,;\ f(x)=x\ln 2-2\ln x \Leftrightarrow f'(x)=\ln 2-\dfrac{2}{x}$

$\Leftrightarrow \forall x\in]0;+\infty[\,;\ f'(x)=\dfrac{x\ln 2-2}{x}$.

• $\forall x\in]0;+\infty[\,;\ f'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{x\ln 2-2}{x}>0 \Leftrightarrow x\ln 2-2>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{2}{\ln 2} \Leftrightarrow x\in \left]\dfrac{2}{\ln 2};+\infty\right[$

❖ $f\left(\dfrac{2}{\ln 2}\right)=\left(\dfrac{2}{\ln 2}\right)\ln 2-2\ln\left(\dfrac{2}{\ln 2}\right)=2-2\ln\left(\dfrac{2}{\ln 2}\right)$.

❖ $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}(x\ln 2)=0$; $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}(-2\ln x)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0} x\ln 2-2\ln x=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln 2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ ، ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل $"\infty-\infty"$:

• $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln 2-2\ln x=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\ln 2-\dfrac{2\ln x}{x}\right)$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln 2-\dfrac{2\ln x}{x}\right)=\ln 2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\ln 2-\dfrac{2\ln x}{x}\right)=+\infty$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln 2-2\ln x=+\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0		$\frac{2}{\ln 2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	$2-2\ln\left(\frac{2}{\ln 2}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

دراسة دالة لوغاريتمية:

حل التمرين 18:

الدالة f معرفة بـ: $f(x)=\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$.

1) $f(x)=\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right) \Leftrightarrow D_f=]-2;2[$.

❖ $\forall x\in D_f\,;\, f(x)=\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right) \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{\dfrac{1\times(2-x)-(2+x)(-1)}{(2-x)^2}}{\dfrac{2+x}{2-x}}=\dfrac{4}{(2-x)^2}\times\dfrac{2-x}{2+x}$

$\Leftrightarrow \forall x\in D_f\,;\, f'(x)=\dfrac{4}{(2-x)(2+x)}>0$.

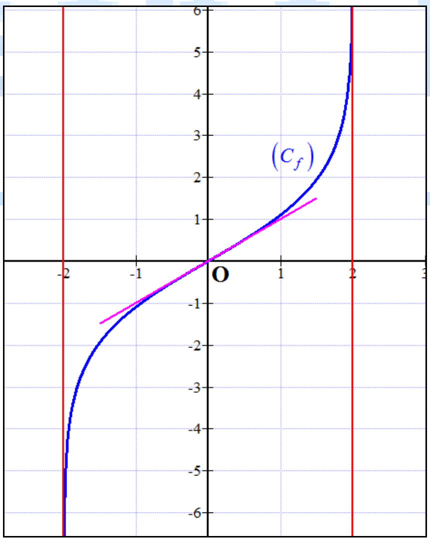
❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2} 2+x=0^+$; $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2} 2-x=-4 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)=0^- \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2}\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)=-\infty$

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} 2+x=4$; $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} 2-x=0^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)=+\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	-2		2
$f'(x)$	‖	$+$	‖
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

❖ الشكل الموالي يمثل (C_f) التمثيل البياني للدالة f :



2) $x \in]-2;2[\Leftrightarrow (-x) \in]-2;2[$.

❖ $\forall (-x) \in]-2;2[\,; f(-x) = \ln\left(\dfrac{2+(-x)}{2-(-x)}\right) = \ln\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right) = -\ln\left(\dfrac{1}{\dfrac{2-x}{2+x}}\right)$

$= -\ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right) = -f(x)$.

❖ نستنتج أنه من أجل كل نقطة $M(x; f(x))$ من (C_f)، فإن نظيرتها $M'(-x;-f(x))$ بالنسبة للنقطة O مبدأ المعلم، تنتمي أيضا لـ (C_f).

ومنه فإن: (C_f) يقبل النقطة O مبدأ المعلم كمركز تناظر.

حل التمرين 19:

الدالة f معرفة بـ: $f(x) = \ln\left(\dfrac{5x^2}{5x^2+2}\right)$.

1) $f(x) = \ln\left(\dfrac{5x^2}{5x^2+2}\right) \Leftrightarrow D_f = \mathbb{R}^*$.

❖ $\forall x \in \mathbb{R}^*; f(x) = \ln\left(\dfrac{5x^2}{5x^2+2}\right) \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{\dfrac{10x(5x^2+2)-5x^2(10x)}{(5x^2+2)^2}}{\dfrac{5x^2}{5x^2+2}}$

$= \dfrac{20x}{(5x^2+2)^2} \times \dfrac{5x^2+2}{5x^2} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^*; f'(x) = \dfrac{4}{x(5x^2+2)}$.

❖ $\forall x \in \mathbb{R}^*; f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{4}{x(5x^2+2)} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{4}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow x \in]0;+\infty[$.

❖ $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(\dfrac{5x^2}{5x^2+2}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(\dfrac{5}{5+\dfrac{2}{x^2}}\right) = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(\dfrac{5x^2}{5x^2+2}\right) = 0$.

❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0}\left(\dfrac{5x^2}{5x^2+2}\right) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \ln\left(\dfrac{5x^2}{5x^2+2}\right) = -\infty$.

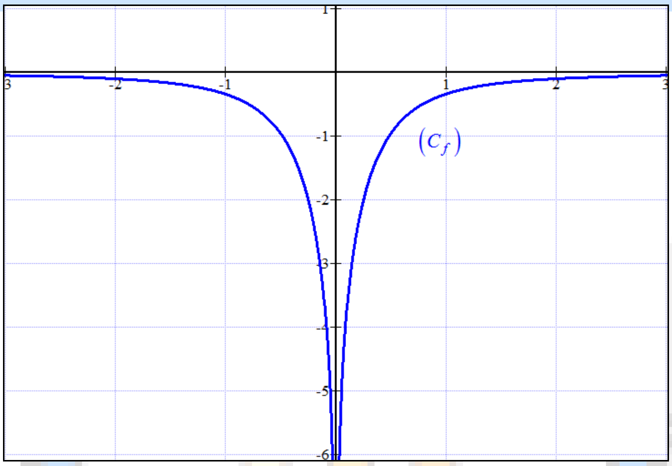
❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\left(\dfrac{5x^2}{5x^2+2}\right) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln\left(\dfrac{5x^2}{5x^2+2}\right) = -\infty$

❖ $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{5x^2}{5x^2+2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{5}{5+\dfrac{2}{x^2}}\right) = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{5x^2}{5x^2+2}\right) = 0$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	
f	0 ↘		$-\infty$ ‖ $-\infty$		↗ 0

❖ الشكل الموالي يمثل (C_f) التمثيل البياني للدالة f :



$$2)\ \forall x\in\mathbb{R}^*;0<5x^2<5x^2+2\Leftrightarrow 0<\frac{5x^2}{5x^2+2}<1\Leftrightarrow ln\left(\frac{5x^2}{5x^2+2}\right)<0$$

$$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^*;f(x)<0.$$

حل التمرين 20:

الدالة f معرفة بـ: $f(x)=ln(ax+b)$ ، حيث: a و b عددان حقيقيان.

❖ (C_f) التمثيل البياني للدالة f يقطع محور الفواصل في النقطة $A(2;0)$ ، معناه:

$$f(2)=0\Leftrightarrow ln(2a+b)=0\Leftrightarrow 2a+b=1\quad(1)$$

❖ و (C_f) يقبل عند النقطة $A(2;0)$ مماسا موازيا للمستقيم الذي معادلته $y=x$ ، معناه: $f'(2)=1$.

● وبما أنه من أجل كل $x\in D_f$ ، $f'(x)=\frac{a}{ax+b}$ ، يكون لدينا: $\frac{a}{2a+b}=1$ (2).

❖ من (1) و (2) نستنتج أن: $a=1$ ، و $b=-1$. ومنه فإن: $f(x)=ln(x-1)$.

حل التمرين 21:

الدالة f معرفة بـ: $f(x)=ln(1+e^x)$.

$$1)\ f(x)=ln(1+e^x)\Leftrightarrow D_f=\mathbb{R}.$$

❖ $\forall x\in\mathbb{R};f(x)=ln(1+e^x)\Leftrightarrow f'(x)=\frac{e^x}{1+e^x}>0.$

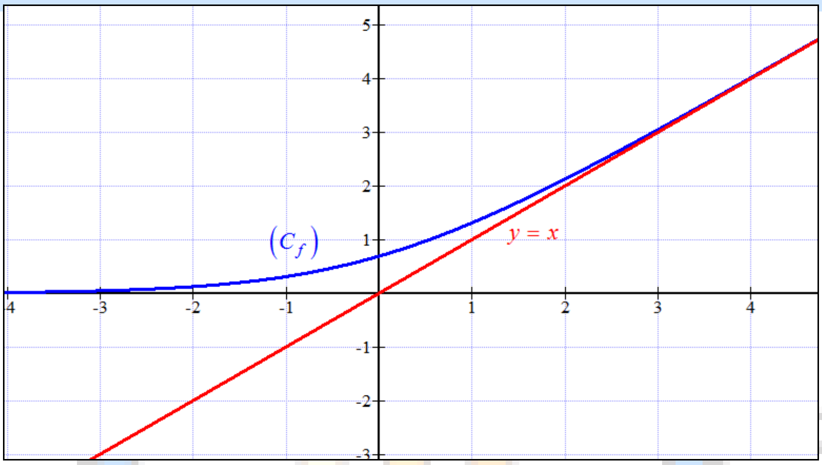
❖ $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+e^x)=1\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}ln(1+e^x)=0.$

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^x)=+\infty\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}ln(1+e^x)=+\infty.$

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$0 \nearrow +\infty$

❖ الشكل الموالي يمثل (C_f) التمثيل البياني للدالة f و المستقيم الذي معادلته $y = x$:



$$2)\ \forall x \in \mathbb{R};\ f(x) - x = ln\left(1+e^{x}\right) - x = ln\left(1+e^{x}\right) - ln\left(e^{x}\right) = ln\left(\frac{1+e^{x}}{e^{x}}\right)$$

$$= ln\left(\frac{1}{e^{x}}+1\right) = ln\left(1+e^{-x}\right).$$

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(1+e^{-x}\right) = ln1 = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = 0.$

❖ نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $y = x$ مماس مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

حل التمرين 22:

الدالة f معرفة بـ: $f(x) = ln\left(e^{x}+e^{-x}\right)$.

$1)\ f(x) = ln\left(e^{x}+e^{-x}\right) \Leftrightarrow D_f = \mathbb{R}.$

❖ $\forall x \in \mathbb{R};\ f(x) = ln\left(e^{x}+e^{-x}\right) \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = \dfrac{e^{x}-\frac{1}{e^{x}}}{e^{x}+\frac{1}{e^{x}}} = \dfrac{\frac{e^{2x}-1}{e^{x}}}{\frac{e^{2x}+1}{e^{x}}}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R};\ f'(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}.$

❖ $\forall x \in \mathbb{R};\ f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} > 0 \Leftrightarrow e^{2x}-1 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[.$

❖ $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = ln\left(e^{\frac{1}{2}}+e^{-\frac{1}{2}}\right) = ln\left(\sqrt{e}+\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) \simeq 0,8.$

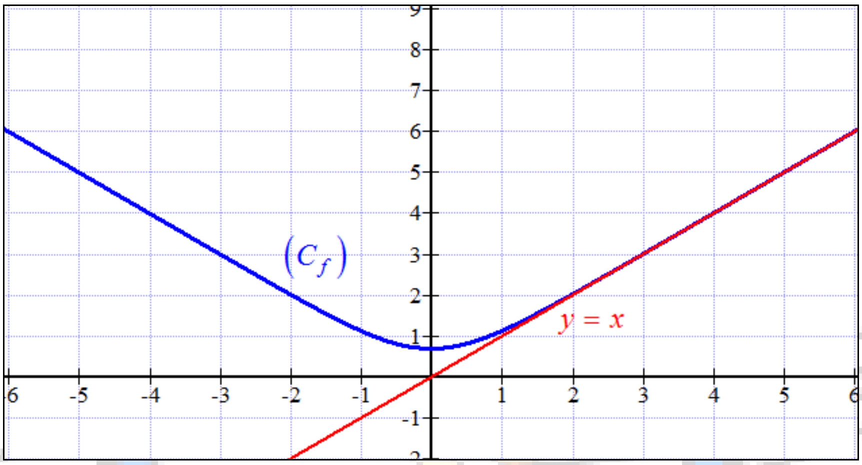
❖ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x}+e^{-x}\right) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} ln\left(e^{x}+e^{-x}\right) = +\infty.$

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x}+e^{-x}\right)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(e^{x}+e^{-x}\right)=+\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$ln\left(\sqrt{e}+\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

❖ الشكل الموالي يمثل $\left(C_f\right)$ التمثيل البياني للدالة f و المستقيم الذي معادلته $y=x$:



2) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=ln\left(e^{x}+e^{-x}\right)=ln\left(e^{x}\left(1+e^{-2x}\right)\right)=ln\left(e^{x}\right)+ln\left(1+e^{-2x}\right)$

$=x+ln\left(1+e^{-2x}\right)$.

3) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)-x=ln\left(1+e^{-2x}\right)$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-2x}\right)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+e^{-2x}\right)=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(1+e^{-2x}\right)=ln1=0$.

❖ ومنه فإن المستقيم D الذي معادلته $y=x$ مماس مقارب مائل لـ $\left(C_f\right)$ عند $+\infty$.

دراسة دالة مرجعية تتضمن عبارة لوغاريتمية:

حل التمرين 23:

الدالة f معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=ln\,x-3(ln\,x)^2$.

1) $\forall x\in]0;+\infty[;\ f(x)=ln\,x-3(ln\,x)^2 \Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{x}-6\times\frac{1}{x}\times ln\,x$

$\Leftrightarrow \forall x\in]0;+\infty[;\ f'(x)=\frac{1-6ln\,x}{x}$.

❖ $\forall x\in]0;+\infty[;\ f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1-6ln\,x}{x}>0 \Leftrightarrow 1-6ln\,x>0 \Leftrightarrow x<e^{\frac{1}{6}} \Leftrightarrow x\in\left]0;e^{\frac{1}{6}}\right[$.

❖ $f\left(e^{\frac{1}{6}}\right)=ln\left(e^{\frac{1}{6}}\right)-3\left(ln\left(e^{\frac{1}{6}}\right)\right)^2=\frac{1}{6}-3\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{12}$.

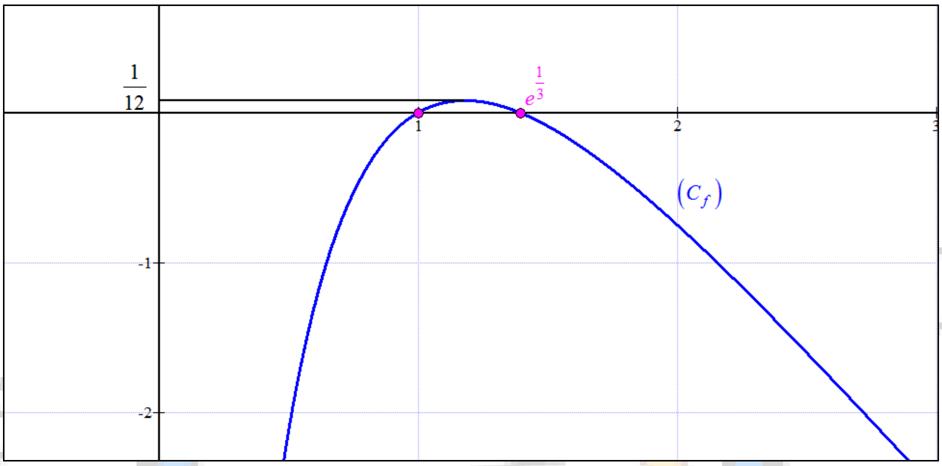
❖ $\forall x\in]0;+\infty[;\ f(x)=ln\,x-3(ln\,x)^2=ln\,x(1-3ln\,x)$.

- $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x = -\infty$; $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 1-3\ln x = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x(1-3\ln x) = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = -\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} 1-3\ln x = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x(1-3\ln x) = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0		$e^{\frac{1}{6}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	$\frac{1}{12}$	↘	$-\infty$

❖ الشكل الموالي يمثل (C_f) التمثيل البياني للدالة f :



2) $\forall x \in]0;+\infty[; f(x) = \ln x - 3(\ln x)^2 = \ln x(1-3\ln x)$.

❖ $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

❖ $1-3\ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{3}}$.

❖ ومنه فإن جدول إشارة الدالة f يكون كالتالي:

x	0		1		$e^{\frac{1}{3}}$		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-3\ln x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ومنه فإن:

❖ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \; ; \; x = e^{\frac{1}{3}}$.

❖ $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0;1[\cup \left]e^{\frac{1}{3}};+\infty\right[$.

❖ $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]1;e^{\frac{1}{3}}\right[$.

حل التمرين 24:

الدالة f معرفة بـ: $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$.

1) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x} \Leftrightarrow D_f =]0;1[\cup]1;+\infty[$.

❖ $\forall x \in D_f ; f(x)=\dfrac{1}{x\ln x} \Leftrightarrow f'(x)=-\dfrac{1\times \ln x + x\times \frac{1}{x}}{(x\ln x)^2}$

$\Leftrightarrow \forall x \in D_f ; f'(x)=-\dfrac{\ln x+1}{(x\ln x)^2}$.

❖ $\forall x \in D_f ; f'(x)>0 \Leftrightarrow -\dfrac{\ln x+1}{(x\ln x)^2}>0 \Leftrightarrow \ln x+1<0 \Leftrightarrow \ln x<-1$

$\Leftrightarrow x<e^{-1} \Leftrightarrow x\in \left]0;e^{-1}\right[$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} x\ln x=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} \dfrac{1}{x\ln x}=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} (x\ln x)=0^- \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} \dfrac{1}{x\ln x}=-\infty$

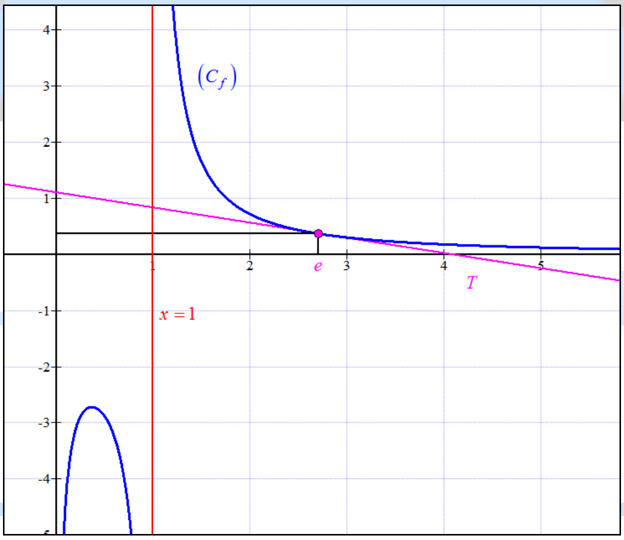
❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} (x\ln x)=0^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} \dfrac{1}{x\ln x}=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x\ln x}=0$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
f	$+\infty$ ↘	0

❖ الشكل الموالي يمثل (C_f) التمثيل البياني للدالة f والمماس T:



2) معادلة المماس T لـ (C_f) عند النقطة التي فاصلتها e هي: $y=f'(e)(x-e)+f(e)$.

❖ $f(e)=\dfrac{1}{e\ln e}=\dfrac{1}{e}$.

❖ $f'(e)=-\dfrac{\ln e+1}{(e\ln e)^2}=-\dfrac{2}{e^2}$.

❖ $y=\left(-\frac{2}{e^2}\right)(x-e)+\frac{1}{e}=-\frac{2}{e^2}x+\frac{3}{e}$.

❖ ومنه فإن معادلة المماس T لـ (C_f) عند النقطة التي فاصلتها e هي: $y=-\frac{2}{e^2}x+\frac{3}{e}$.

حل التمرين 25:

الدالة f معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x^2-2+\ln x$.

1) $\forall x\in]0;+\infty[\,; f(x)=x^2-2+\ln x \Leftrightarrow f'(x)=2x+\frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow \forall x\in]0;+\infty[\,; f'(x)=\frac{2x^2+1}{x}>0$.

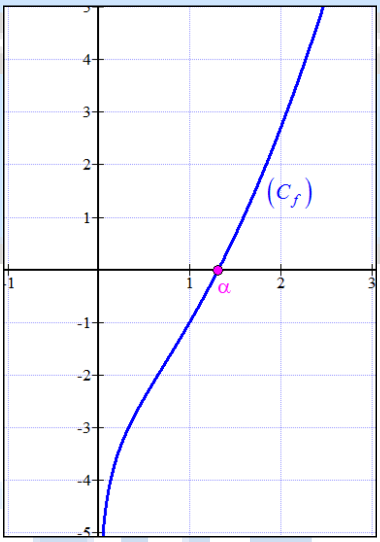
❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} x^2-2=-2$; $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} \ln x=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} x^2-2+\ln x=-\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x^2-2+\ln x=+\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	‖ $+$
f	‖ $-\infty$ ↗ $+\infty$

❖ الشكل الموالي يمثل (C_f) التمثيل البياني للدالة f :



2) بما أن الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ ، و $0\in\left]\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$ ، فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha\in]0;+\infty[$.

❖ من خلال جدول القيم التالي، نلاحظ أن $1,314<\alpha<1,315$.

x	1,25	1,3	1,31	1,314	1,315	1,32
$f(x)$	$-0,2144$	$-0,0476$	$-0,0139$	$-0,0003$	$0,0031$	$0,02$

حل التمرين 26:

الدالة f معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+ln\left(\frac{x}{2x+1}\right)$.

1) $\forall x\in]0;+\infty[\,;f(x)=x+ln\left(\frac{x}{2x+1}\right)\Leftrightarrow f'(x)=1+\dfrac{\frac{1\times(2x+1)-x\times 2}{(2x+1)^2}}{\frac{x}{2x+1}}$

$\Leftrightarrow \forall x\in]0;+\infty[\,;f'(x)=1+\frac{1}{x(2x+1)}>0$.

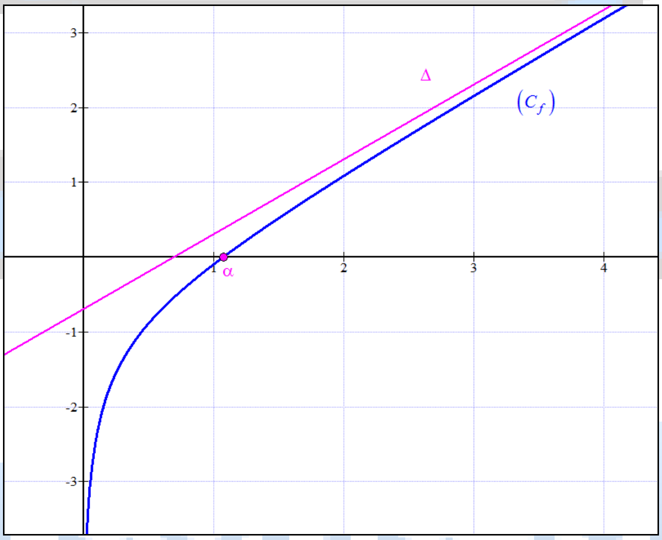
❖ $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\left(\frac{x}{2x+1}\right)=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} ln\left(\frac{x}{2x+1}\right)=-\infty\Leftrightarrow \lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} x+ln\left(\frac{x}{2x+1}\right)=-\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2x+1}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(\frac{x}{2x+1}\right)=ln\frac{1}{2}=-ln2\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x+ln\left(\frac{x}{2x+1}\right)=+\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

❖ الشكل الموالي يمثل (C_f) التمثيل البياني للدالة f والمستقيم Δ:



2) $f(x)-(x-ln2)=x+ln\left(\frac{x}{2x+1}\right)-x+ln2=ln\left(\frac{x}{2x+1}\right)+ln2=ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right)$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x+1}=1\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right)=ln1=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-ln2)=0$.

❖ ومنه فإن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x-ln2$ مماس مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

3) $\forall x\in]0;+\infty[\,;ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right)=ln\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{2x}}\right)$.

❖ $\forall x \in]0;+\infty[\,;\ \frac{1}{2x} > 0 \Leftrightarrow 1+\frac{1}{2x} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1+\frac{1}{2x}} < 1 \Leftrightarrow ln\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2x}}\right) < 0$

$\Leftrightarrow f(x)-(x-ln2) < 0$.

❖ ومنه فإنه من أجل كل $x \in]0;+\infty[$ ، (C_f) يقع تحت المستقيم Δ .

(4

❖ $f(1) = 1 + ln\left(\frac{1}{3}\right) = 1 - ln3 \simeq -0,1 < 0$.

❖ $f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{4} + ln\left(\frac{\frac{5}{4}}{2\left(\frac{5}{4}\right)+1}\right) = \frac{5}{4} + ln\left(\frac{5}{14}\right) \simeq 0,2 > 0$.

❖ بما أن الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ ، و $0 \in \left]f(1); f\left(\frac{5}{4}\right)\right[$ ، فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha \in \left]1;\frac{5}{4}\right[$.

تمّ بحمد الله وتوفيقه