طرق عملية لحل تمارين الدوال الأسية

1. استعمال الخصائص الجبرية للدالة الأسية لتحويل عبارة:

- ❖ إيجاد العدد الأسي الواجب تغييره في العبارة.
- ❖ من أجل تحويل العبارة، نستعمل:
  - التحليل ثم الاختزال.
  - ضرب البسط والمقام في نفس العدد الأسي.
- ❖ استعمال الخصائص الجبرية للدالة الأسية لتحويل العبارة.

مثال: برهن المساواة التالية:

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \frac{e^{3x}}{e^{3x}+e^{x}} = \frac{1}{e^{-2x}+1}$$

الحل:

❖ نلاحظ أن e^{3x} يوجد في الشق الأيسر من المساواة ولا يوجد في الشق الآخر. إذن يجب تغييره.

❖ نحلل البسط والمقام في e^{3x} فنتحصل على:

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \frac{e^{3x}}{e^{3x}+e^{x}} = \frac{e^{3x}\times 1}{e^{3x}\left(\frac{e^{3x}}{e^{3x}}+\frac{e^{x}}{e^{3x}}\right)}$$

❖ نستعمل الخصائص الجبرية للدالة الأسية لتحويل العبارة، فنتحصل على:

$$\frac{e^{3x}}{e^{3x}+e^{x}} = \frac{e^{3x}\times 1}{e^{3x}\left(\frac{e^{3x}}{e^{3x}}+\frac{e^{x}}{e^{3x}}\right)} = \frac{e^{3x}\times 1}{e^{3x}\left(1+e^{x-3x}\right)} = \frac{e^{3x}\times 1}{e^{3x}\left(1+e^{-2x}\right)}$$

❖ نختزل e^{3x} في البسط والمقام فنتحصل على:

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \frac{e^{3x}}{e^{3x}+e^{x}} = \frac{1}{e^{-2x}+1}$$

2. حل معادلة من الشكل $e^{u(x)} = e^{v(x)}$:

❖ حل معادلة من الشكل $e^{u(x)} = e^{v(x)}$ يعود لحل المعادلة $u(x)=v(x)$.

مثال: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية: $e^{x-1}=e^{2x}$.

الحل: $e^{x-1}=e^{2x} \Leftrightarrow x-1=2x \Leftrightarrow x=-1$

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $e^{x-1}=e^{2x}$ هي: $S=\{-1\}$.

3. حل معادلة من الشكل $e^{u(x)}=k$:

لحل معادلة من الشكل $e^{u(x)}=k$ نتبع ما يلي:
- ❖ إذا كان $k\le 0$، فإن المعادلة ليس لها حلول.
- ❖ إذا كان $k>0$، نطبق الدالة اللوغاريتمية النيبيرية على طرفي المساواة لنزع الأس.

مثال: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية: $e^{4x-1}=3$.

الحل: $3>0$ ومنه فإن: $e^{4x-1}=3\Leftrightarrow 4x-1=ln3\Leftrightarrow x=\frac{ln3+1}{4}$

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $e^{4x-1}=3$ هي: $S=\left\{\frac{ln3+1}{4}\right\}$.

4. حل معادلة من الشكل $ae^{2u(x)}+be^{u(x)}+c=0$:

لحل معادلة من الشكل $ae^{2u(x)}+be^{u(x)}+c=0$ نتبع ما يلي:
- ❖ نضع $e^{u(x)}=X$، ونحل المعادلة $aX^2+bX+c=0$.
- ❖ نطبق الدالة اللوغاريتمية النيبيرية على الحلول المتحصل عليها لنزع الأس.

مثال: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية: $e^{2x}+2e^x-3=0$.

الحل: نضع $e^x=X$ ومنه نتحصل على: $X^2+2X-3=0$.

❖ $\Delta=16>0\Rightarrow X_1=-3\ ;\ X_2=1$

❖ $X_1=e^x=-3$ غير مقبول لأنه من أجل كل $x\in$ ¡ لدينا: $e^x>0$.

❖ $X_2=e^x=1\Leftrightarrow x=ln1=0$.

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $e^{2x}+2e^x-3=0$ هي: $S=\{0\}$.

ملاحظة: في بعض الأحيان، لا يكون لدينا من الوهلة الأولى معادلة من الشكل $aX^2+bX+c=0$، في هذه الحالة يجب إجراء التغييرات اللازمة للحصول على الشكل $aX^2+bX+c=0$.

فمثلا المعادلة $aX+b+\frac{c}{X}=0$ (مع $X\neq 0$) ليست معادلة من الدرجة الثانية. لذا يجب تحويلها إلى $aX^2+bX+c=0$ وذلك بضرب طرفي المساواة في X فنتحصل على:

$$aX+b+\frac{c}{X}=0\Leftrightarrow X\left(aX+b+\frac{c}{X}\right)=0\Leftrightarrow aX^2+bX+c=0.$$

5. حل متراجحة من الشكل $e^{u(x)}\le e^{v(x)}$:

❖ حل متراجحة من الشكل $e^{u(x)}\le e^{v(x)}$ يعود لحل المتراجحة $u(x)\le v(x)$.

مثال: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية: $e^{2x-3}\le e^{3x}$.

الحل: $e^{2x-3}\le e^{3x}\Leftrightarrow 2x-3\le 3x\Leftrightarrow x\ge -3$

ومنه فإن مجموعة حلول المتراجحة $e^{2x-3}\le e^{3x}$ هي: $S=[-3;+\infty[$.

6. حل متراجحة من الشكل $e^{u(x)} \geq k$:

نعلم أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا: $e^x > 0$. ومنه فإن:

❖ مجموعة حلول المتراجحة $e^{u(x)} \geq k$ هي مجموعة تعريف الدالة u إذا كان $k \leq 0$.

❖ المتراجحة $e^{u(x)} \leq k$ ليس لها حلول في $\mathbb{R}$ إذا كان $k \leq 0$.

❖ إذا كان $k > 0$، لحل المتراجحة $e^{u(x)} \geq k$، نطبق الدالة اللوغاريتمية النيبيرية على طرفي المتراجحة لنزع الأس.

مثال: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية: $e^{2x+7} < 2$.

الحل: $2 > 0$ ومنه فإن: $e^{2x+7} < 2 \Leftrightarrow 2x+7 < ln2 \Leftrightarrow x < \dfrac{ln2-7}{2}$

ومنه فإن مجموعة حلول المتراجحة $e^{2x+7} < 2$ هي: $S = \left]-\infty; \dfrac{ln2-7}{2}\right[$.

7. حل متراجحة من الشكل $ae^{2u(x)} + be^{u(x)} + c > 0$:

لحل متراجحة من الشكل $ae^{2u(x)} + be^{u(x)} + c > 0$ نتبع ما يلي:

❖ نضع $e^{u(x)} = X$، ونحل المتراجحة $aX^2 + bX + c > 0$.

❖ نطبق الدالة اللوغاريتمية النيبيرية على الحلول المتحصل عليها لنزع الأس.

مثال: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية: $e^{2x} - 4e^x + 3 < 0$.

الحل: نضع $e^x = X$ ومنه نتحصل على: $X^2 - 4X + 3 < 0$.

❖ $\Delta = 4 > 0 \Rightarrow X_1 = 1 \ ; \ X_2 = 3$

ومنه نستنتج أن: $X^2 - 4X + 3 < 0$ على المجال $]1;3[$.

❖ $X_1 = e^x = 1 \Leftrightarrow x = ln1 = 0$.

❖ $X_2 = e^x = 3 \Leftrightarrow x = ln3$.

❖ بما أن كل الأعداد الحقيقية من المجال $]1;3[$ هي أعداد موجبة، وبما أن الدالة ln متزايدة تماما على $]0;+\infty[$، فإن مجموعة حلول المتراجحة $e^{2x} - 4e^x + 3 < 0$ هي: $S =]0; ln3[$.

8. حل متراجحة على شكل جداء أو حاصل قسمة:

لحل متراجحة على شكل جداء أو حاصل قسمة، ندرس إشارة الجداء أو حاصل القسمة عن طريق جدول إشارة، مع الأخذ بعين الاعتبار أن العبارات الوسيطة في هذه الحالة هي عبارات تتضمن الأس.

مثال: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية: $\dfrac{e^{3x-1} - 3}{e^x - 1} > 0$.

الحل:

❖ $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = ln1 = 0$.

ومنه فإن: $\dfrac{e^{3x-1} - 3}{e^x - 1}$ معرفة من أجل $x \neq 0$.

❖ $e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x>ln1 \Leftrightarrow x>0$.

❖ $e^{3x-1}-3>0 \Leftrightarrow e^{3x-1}>3 \Leftrightarrow 3x-1>ln3 \Leftrightarrow x>\dfrac{1+ln3}{3}$.

ومنه فإن جدول إشارة $\dfrac{e^{3x-1}-3}{e^x-1}$ يكون كما يلي:

x	$-\infty$		0		$\frac{1+\ln 3}{3}$		$+\infty$
$e^{3x-1}-3$		$-$		$-$	0	$+$	
e^x-1		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{e^{3x-1}-3}{e^x-1}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

ومنه فإن مجموعة حلول المتراجحة $\dfrac{e^{3x-1}-3}{e^x-1}>0$ هي: $S=\left]-\infty;0\right[\cup \left]\dfrac{1+ln3}{3};+\infty\right[$.

9. حساب مشتقة الدالة $f=e^u$:

❖ نثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال I.

❖ نوضح عبارة u حيث: $f=e^u$، ثم نحسب مشتقتها u'.

❖ نطبق قاعدة أن: $f'=u'e^u$، ونحسب f'.

مثال: لتكن الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=e^{x^3-5x^2+7x}$. أحسب مشتقة الدالة f.

❖ الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها مركبة من دالة كثيرة حدود قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، متبوعة بالدالة الأسية القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

❖ نضع $u(x)=x^3-5x^2+7x$ ومنه فإن: $u'(x)=3x^2-10x+7$.

❖ ومنه فإن: $f'(x)=\left(3x^2-10x+7\right)e^{x^3-5x^2+7x}$.

10. حساب مشتقة دالة مرجعية f تتضمن دالة أسية:

❖ نثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال I.

❖ حسب عبارة f، نوضح إن كنا سنستعمل مشتقة مجموع، جداء، حاصل قسمة أو دالة مركبة.

❖ نوضح عبارة الدوال الوسيطة التي تعبر عن f، ثم نحسب مشتقة كل منها.

❖ نذكر الصيغة التي تسمح لنا بحساب f'، ونحسب f'.

❖ نختزل النتيجة إلى أبعد حد ممكن للحصول على عبارة لـ f' يسهل علينا بعدها إيجاد إشارتها.

مثال: لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{2e^x}{x+1}$. أحسب مشتقة الدالة f.

❖ الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ لأنها حاصل قسمة دالة أسية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$، على دالة تآلفية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

❖ نلاحظ أن: $f=\frac{u}{v}$ حيث: $u(x)=2e^x$ و $v(x)=x+1$. ومنه فإن: $u'(x)=2e^x$ و $v'(x)=1$.

❖ بما أن: $f=\frac{u}{v}$ ، فإن: $f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$. أي: $f'(x)=\frac{2e^x(x+1)-2e^x\times 1}{(x+1)^2}=\frac{2e^x(x+1-1)}{(x+1)^2}$

ومنه فإن $f'(x)=\frac{2xe^x}{(x+1)^2}$.