ملخص درس الدوال الأسية واللوغاريتمية

I. الدوال الأسية:

1. الدوال الأسية:

❖ الدالة الأسية هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^x$. و هي الدالة الوحيدة القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وتحقق: $f'=f$ و $f(0)=1$.

❖ ليكن k عددا حقيقيا. توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'=kf$ و $f(0)=1$. هذه الدالة هي الدالة $x \to e^{kx}$.

2. الخصائص الجبرية:

ليكن x و y عددين حقيقيين، و n عدد طبيعي.

❖ $e^{x+y}=e^x \times e^y$. $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$ $e^{x-y}=\dfrac{e^x}{e^y}$ $(e^x)^n=e^{nx}$.

3. النهايات:

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$

4. نهايات خاصة:

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x}=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x}=1$.

❖ ليكن $n\in\mathbb{N}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n}=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x=0$.

5. المشتقة:

$(e^x)'=e^x$ $(e^u)'=u'e^u$.

6. اتجاه تغير الدالة الأسية:

❖ من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا: $e^x>0$.

❖ الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

❖ من أجل كل عدد حقيقي $x\le 0$ فإن: $0<e^x\le 1$.

❖ من أجل كل عدد حقيقي $x\ge 0$ فإن: $e^x\ge 1$.

❖ $e^x=e^y \Leftrightarrow x=y$ و $e^x<e^y \Leftrightarrow x<y$.

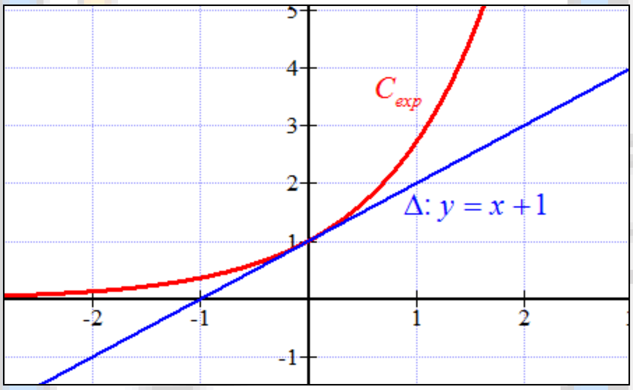
7. جدول تغيرات الدالة الأسية وتمثيلها البياني:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$exp'(x)$		$+$	
e^x	0	1 ↗	$+\infty$

خصائص:

❖ المنحنى C_{exp} الممثل للدالة الأسية يقبل محور الفواصل كمستقيم مقارب لما x يؤول إلى $-\infty$.

❖ لدينا: $exp'(0)=1$ و $e^0=1$، إذن: C_{exp} يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 0 مماسا $\Delta : y=x+1$.



II. دراسة الدالة $exp\circ u$:

1. التعريف:

لتكن الدالة u المعرفة على المجال I.

تركيب الدالة u متبوعة بالدالة الأسية، هي الدالة f التي نرمز لها بالرمز: $f=e^u$.

2. النهايات:

لدراسة نهاية دالة $exp\circ u$ نستعمل المبرهنة الخاصة بنهاية دالة مركبة.

3. اتجاه التغيرات:

إذا كانت u دالة معرفة على المجال I، فإن للدالتين u و $exp\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I.

4. المشتقة:

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على المجال I، فإن الدالة $exp\circ u$ قابلة للاشتقاق على المجال I، ولدينا من أجل كل $x\in I$، $(exp\circ u)'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.

ملاحظة:

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على I، فإن الدالة $f=e^u$ قابلة للاشتقاق على I، ولدينا من أجل كل $x\in I$، $f'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.

ونعلم أنه من أجل كل $x\in I$، $e^{u(x)}>0$، ومنه فإن $f'(x)$ هي من إشارة $u'(x)$.

III. الدوال اللوغاريتمية النيبيرية:

1. اللوغاريتم النيبيري لعدد:

من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$، يوجد عدد حقيقي وحيد b بحيث $e^b = a$. يسمى هذا العدد "اللوغاريتم النيبيري للعدد a" ونرمز له بالرمز "$\ln a$".

مثال: العدد الحقيقي الوحيد b الذي يحقق $e^b = 5$ هو $\ln 5$.

2. الدالة اللوغاريتمية النيبيرية:

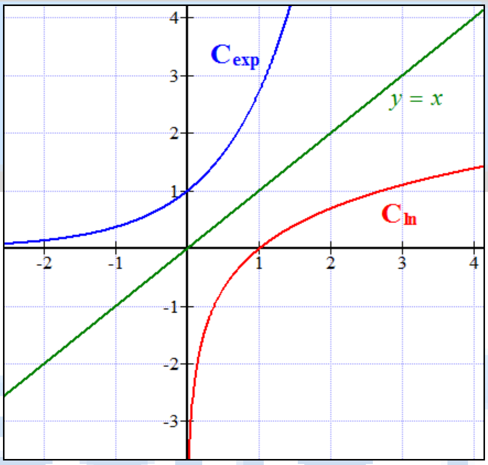
نسمي "الدالة اللوغاريتمية النيبيرية" الدالة التي نرمز لها بالرمز "$\ln$" والتي ترفق بكل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ العدد الحقيقي $\ln x$.

3. نتائج:

- ❖ من أجل كل $x \in]0;+\infty[$، ومن أجل كل $y \in \mathbb{R}$ لدينا: $x = e^y$ يعني $y = \ln x$.
- ❖ من أجل كل $x \in]0;+\infty[$، لدينا: $e^{\ln x} = x$.
- ❖ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$، لدينا: $\ln(e^x) = x$.
- ❖ بما أن $e^0 = 1$ فإن: $\ln 1 = 0$، وبما أن $e^1 = e$ فإن: $\ln e = 1$.

ملاحظة:

الدالة اللوغاريتمية النيبيرية "$\ln$" هي الدالة العكسية للدالة الأسية "$\exp$". ومنه فإنه في معلم متعامد ومتجانس، التمثيلان البيانيان للدالتين الأسية واللوغاريتمية النيبيرية متناظران بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y = x$.



4. اتجاه تغير الدالة اللوغاريتمية النيبيرية:

الدالة اللوغاريتمية النيبيرية متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

نتائج:

من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$، لدينا:

- ❖ $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$.
- ❖ $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$.

❖ $\ln a > 0 \Leftrightarrow a > 1$.

❖ $\ln a < 0 \Leftrightarrow 0 < a < 1$.

5. الخصائص الجبرية:

من أجل كل عددين حقيقيين x و y من $]0;+\infty[$ ، ومن أجل كل عدد نسبي n:

❖ $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

❖ $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$.

❖ $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$.

❖ $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$.

❖ $\ln(x^n) = n \ln x$.

6. النهايات:

$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

7. نهايات خاصة:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ و $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$.

❖ ليكن $n \in \mathbb{N}$ ، $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ ، $\lim_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0$.

من تعريف العدد المشتق لدينا: $\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ أو $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$.

8. الاستمرارية والاشتقاق:

الدالة اللوغاريتمية النيبيرية مستمرة وقابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ، ولدينا من أجل كل x من $]0;+\infty[$:

$\ln' x = \frac{1}{x}$.

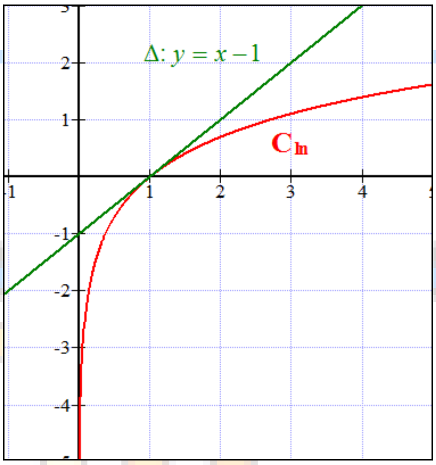
9. جدول تغيرات الدالة اللوغاريتمية النيبيرية وتمثيلها البياني:

x	0	1	$+\infty$
$\ln'(x)$	‖	$+$	
$\ln x$	‖ $-\infty$	0 ↗	$+\infty$

خصائص:

❖ المنحنى C_{ln} الممثل للدالة اللوغاريتمية النيبيرية يقبل محور التراتيب كمستقيم مقارب لما x يؤول إلى 0^+.

❖ لدينا: $ln'(1)=1$ و $ln1=0$، إذن: C_{ln} يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماسا $\Delta: y=x-1$.



IV. دراسة الدالة $ln\circ u$:

1. النهايات:

لدراسة نهاية دالة $ln\circ u$ نستعمل المبرهنة الخاصة بنهاية دالة مركبة.

2. اتجاه التغيرات:

إذا كانت u دالة معرفة وموجبة تماما على I، فإن للدالتين u و $ln\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على I.

3. المشتقة:

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق وموجبة تماما على المجال I، فإن الدالة $ln\circ u$ قابلة للاشتقاق على المجال I، ولدينا من أجل كل $x\in I$ ، $(ln\circ u)'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

V. دالة اللوغاريتم العشري:

1. التعريف:

نسمي "دالة اللوغاريتم العشري" الدالة التي نرمز لها بالرمز " log "، والمعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $log\, x=\dfrac{ln\, x}{ln 10}$.

2. الخصائص الجبرية:

كل الخواص الجبرية للدالة "ln" تبقى محققة من قبل الدالة "log"، وبصفة خاصة:

من أجل كل عددين حقيقيين x و y من $]0;+\infty[$ ، ومن أجل كل عدد نسبي n:

❖ $log(xy)=log\, x+log\, y$.

❖ $log\dfrac{x}{y}=log\, x-log\, y$.

❖ $\log\left(x^n\right)=n\log x$.

❖ بما أن $\log 10=1$ فإن: $\log\left(10^n\right)=n$.

3. اتجاه تغير دالة اللوغاريتم العشري:

الدالة "$\log$" متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

نتيجة:

إذا كان x عددا حقيقيا حيث $10^n \le x \le 10^{n+1}$ فإن $n \le \log x \le n+1$.

تمّ بحمد الله وتوفيقه