الأعداد الطبيعية والأعداد الناطقة

I. قواسم عدد طبيعي:

a و b عددان طبيعيان حيث $b \neq 0$،

- ❖ القول أن b قاسم لـ a معناه أن باقي القسمة الإقليدية لـ a على b هو 0.
- ❖ القول أن b قاسم لـ a معناه يوجد عدد طبيعي k حيث: $a = k \times b$.

ملاحظات:

- ❖ كل الجمل التالية لها نفس المعنى: (a مضاعف لـ b)، (a يقبل للقسمة على b)، (b يقسم a)، (b قاسم لـ a).
- ❖ 1 هو قاسم لكل عدد طبيعي لأن : $a = 1 \times a$.
- ❖ كل عدد طبيعي غير معدوم هو قاسم للعدد 0 لأن : $0 \times a = 0$.
- ❖ كل عدد طبيعي غير معدوم يقبل القسمة على نفسه لأن : $a = a \times 1$.

أمثلة:

- ❖ 3 قاسم للعدد 9 لأن : $9 = 3 \times 3$.
- ❖ 12 قاسم للعدد 12 لأن : $12 = 12 \times 1$.
- ❖ 6 قاسم للعدد 30 لأن : $30 = 6 \times 5$.
- ❖ 25 قاسم للعدد 100 لأن : $100 = 25 \times 4$.
- ❖ 6 ليس قاسما للعدد 20 لأنه لا يوجد عدد طبيعي k بحيث: $20 = k \times 6$.

II. خواص قواسم عدد طبيعي:

لتكن n, b, a أعدادا طبيعية غير معدومة حيث $a > b$:

- ❖ إذا كان n يقسم a و b، فإن n يقسم كلا من $(a+b)$، $(a-b)$ و $(a \times b)$.
- ❖ إذا كان n يقسم a و b، فإن n يقسم باقي القسمة الإقليدية لـ a على b.
- ❖ إذا كان a يقسم b، و b يقسم n، فإن a يقسم n.

أمثلة:

6 قاسم لكل من 12 و30 ومنه فإن:

- ❖ 6 قاسم لـ $(30+12)$ أي 6 قاسم لـ 42.
- ❖ 6 قاسم لـ $(30-12)$ أي 6 قاسم لـ 18.
- ❖ 6 قاسم لباقي القسمة الإقليدية لـ 30 على 12 أي 6 قاسم لـ 6.

III. القواسم المشتركة لعددين طبيعيين:

القواسم المشتركة لعددين طبيعيين a و b هي الأعداد الطبيعية غير المعدومة التي تقسم a و b في آن واحد.

مثال:

- ❖ قواسم العدد 6 هي: 1 ,2 ,3 ,6.
- ❖ قواسم العدد 9 هي: 1 ,3 ,9.
- ❖ ومنه فإن القواسم المشتركة لــ 6 و9 هي: 1 و3.

طريقة تعيين قواسم عدد طبيعي:

للبحث عن قواسم عدد طبيعي a، نجري القسمة الإقليدية للعدد a على الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها أصغر أو يساوي a. وفي الحالات التي يكون فيها الباقي معدوما، فإن كلا من المقسوم عليه والناتج هما قاسمان للعدد a.

لتسهيل عملية البحث، نطبق قواعد قابلية القسمة على 9,5,4,3,2.

مثال:

لتعيين كل قواسم العدد 98، نتبع الخطوات التالية:

- ❖ لدينا: $9^2 < 98 < 10^2$، ومنه نختبر قابلية قسمة 98 على الأعداد من 1 إلى 9. فنجد أن 98 يقبل القسمة على: 1، 2 و7.
- ❖ من المساويات التالية: $98 = 1 \times 98$، $98 = 2 \times 49$ و $98 = 7 \times 14$ نجد أن 98 يقبل القسمة على: 14، 49 و98.
- ❖ ومنه فإن قواسم العدد 98 هي: $1 ; 2 ; 7 ; 14 ; 49 ; 98$.

IV. القاسم المشترك الأكبر (PGCD):

يسمى أكبر قاسم مشترك لعددين طبيعيين a وb، القاسم المشترك الأكبر لهذين العددين، ونرمز له بـ: $PGCD(a;b)$.

مثال:

- ❖ قواسم العدد 6 هي: 1 ,2 ,3 ,6.
- ❖ قواسم العدد 9 هي: 1 ,3 ,9.
- ❖ القواسم المشتركة لــ 6 و9 هي: 1 و3،ومنه فإن $PGCD(6;9) = 3$.

ملاحظة:

مجموعة قواسم القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين هي مجموعة القواسم المشتركة لهذين العددين.

نتائج:

a و b عددان طبيعيان.

- ❖ $PGCD(a;a)=a$.
- ❖ $PGCD(a;0)=a$.
- ❖ $PGCD(a;b)=PGCD(b;a)$.
- ❖ إذا كان b قاسما للعدد a فإن $PGCD(a;b)=b$.

خواص:

a و b عددان طبيعيان.

- ❖ $PGCD(a;b)=PGCD(b;a-b)$ مع $a\geq b$.
- ❖ $PGCD(a;b)=PGCD(b;r)$ مع كون r هو باقي القسمة الإقليدية للعدد a على b.

طرق حساب القاسم المشترك الأكبر لعددين:

أ. الطريقة 1:

- ❖ وتكون بحساب قواسم كل عدد، ثم استخراج القواسم المشتركة لهذين العددين، وأكبر عدد من هذه الأعداد هو القاسم المشترك الأكبر.
- ❖ هذه الطريقة لا يمكن استعمالها في حالة الأعداد الكبيرة بل تستعمل فقط مع الأعداد الصغيرة نسبيا.

مثال: لنحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 40 و16.

- ❖ قواسم 40 هي: 1، 2، 4، 5، 8، 10، 20، 40.
- ❖ قواسم 16 هي: 1، 2، 4، 8، 16.
- ❖ القواسم المشتركة لـ 40 و16 هي: 1، 2، 4، 8.

ومنه فإن: $PGCD(16;40)=8$.

ب. الطريقة 2: (عمليات الطرح المتتالية):

بتطبيق الخاصية $PGCD(a;b)=PGCD(b;a-b)$ مع $a\geq b$.

- ❖ نحسب الفرق بين العددين بطرح العدد الأصغر من العدد الأكبر.
- ❖ نحتفظ بالعدد الأصغر في عملية الطرح السابقة والناتج من هذه العملية ثم نحسب الفرق بينهما.
- ❖ نكرر العملية حتى الحصول على باقي معدوم.
- ❖ القاسم المشترك الأكبر هو الباقي الذي سبق الصفر.

مثال:

لنحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 40 و16.

$40 - 16 = 8 \qquad 16 - 8 = 8 \qquad 8 - 8 = 0$

ومنه فإن: $PGCD(16;40) = 8$.

ج. الطريقة 3: خوارزمية أقليدس (سلسلة من القسمات الإقليدية):

بتطبيق الخاصية $PGCD(a;b) = PGCD(b;r)$ مع كون r هو باقي القسمة الإقليدية للعدد a على b.

- ❖ نقسم العدد الأكبر على العدد الأصغر.
- ❖ إذا كان الباقي غير معدوم نقسم المقسوم عليه في العملية السابقة على الباقي.
- ❖ نواصل التسلسل في عمليات القسمة إلى غاية الحصول على باقي معدوم.
- ❖ القاسم المشترك الأكبر للعددين هو المقسوم عليه في العملية الأخيرة.

مثال:

لنحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 40 و16.

$40 \div 16 = 2 + 8 \qquad 16 \div 8 = 2 + 0$

ومنه فإن: $PGCD(16;40) = 8$.

V. العددان الأوليان فيما بينهما:

نقول عن عددين طبيعيين a و b أنهما أوليان فيما بينهما، إذا كان القاسم المشترك الأكبر لهما هو 1 أي: $PGCD(a;b) = 1$.

أمثلة:

- ❖ 14 و15 أوليان فيما بينهما،
- ❖ 25 و36 أوليان فيما بينهما،
- ❖ 118 و124 ليسا أوليان فيما بينهما لأن 2 هو قاسم مشترك لهما.

VI. الكسر الغير قابل للاختزال:

الكسر الغير قابل للاختزال هو الكسر الذي بسطه ومقامه أوليان فيما بينهما، أي: $\frac{a}{b}$ كسر غير قابل للاختزال معناه $PGCD(a;b) = 1$.

أمثلة:

- ❖ $\frac{22}{15}$ هو كسر غير قابل للاختزال لأن: $PGCD(15;22) = 1$.

❖ $\frac{12}{18}$ هو كسر قابل للاختزال لأن $PGCD(12;18)=6\neq 1$.

ملاحظة:

بقسمة كل من البسط والمقام على القاسم المشترك لهما، نحصل على كسر غير قابل للاختزال.

مثال:

لدينا: $PGCD(12;18)=6$ ومنه فإن $\frac{2}{3}=\frac{12\div 6}{18\div 6}=\frac{12}{18}$ حيث $\frac{2}{3}$ كسر غير قابل للاختزال لأن $PGCD(2;3)=1$.

مثال لبرنامج *Excel* لحساب القاسم المشترك الأكبر لعددين:

a	b	r
1 209	899	310
899	310	279
310	279	31
279	31	0

a =	b	x	q	+	r
1 209	899	x	1	+	310
899	310	x	2	+	279
310	279	x	1	+	31
279	31	x	9	+	0

نستنتج من هذا البرنامج أن: $PGCD(1209;899)=31$.

تمّ بحمد الله وتوفيقه